Ю. С. СИКОРСКИЙ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Ю. С. СИКОРСКИЙ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

С ПРИЛОЖЕНИЕМ ИХ К НЕКОТОРЫМ ТЕХНИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ

Под редакцией проф. С. Г. МИХЛИНА









ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1940 ЛЕНИНГРАД

ГОНТИ 1938.
8. Торнтон-Фрай, Обыкновенные диференциальные уравнения, ОНТИ 1934.
9. Кузьмин Р. О., Бесселевы функции, ОНТИ 1935.
10. Сикорский Ю. С., Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике, ОНТИ 1935.

C. Приближенные способы интегрирования диференциальных уравнений.

Кроме указанных в общих курсах диференциальных уравнений:
1. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях, Акад. наук 1933.
2. Оппоков Г. В., Численное интегрирование диференциальных уравнений, ГТТИ 1932.
3. Головнин Д. Н., Графическая математика, ГНТИ 1931.
4. Крылов А. Н., О расчете балок, лежащих на упругом основании, Акад. наук 1931.
5. Рунге С., Графические методы, ОНТИ 1936.
6. Скарборо Дж., Численные методы анализа, ОНТИ 1936.
7. Франк М. Л., Графические методы интегрирования диференциальных уравнений, ОНТИ 1934.

1687

СОДЕРЖАНИЕ.

Введение.

§ 1. Понятие о диференциальном уравнении 5
§ 2. Порядок и степень диференциального уравнения 6
§ 3. Диференциальное уравнение как результат исключения произвольных постоянных 7
§ 4. Общий, частный и особый интегралы диференциального уравнения 8
§ 5. Интегральные кривые диференциального уравнения 9
§ 6. Замечание об интегрировании диференциальных уравнений . 10

Глава I. **Диференциальные уравнения первого порядка.**

§ 7. Диференциальные уравнения с отделяющимися переменными 11
§ 8. О полных диференциалах 18
§ 9. Уравнения, левая часть которых есть полный диференциал . 20
§ 10. О методах интегрирования диференциальных уравнений первого порядка 23
§ 11. Однородные уравнения . . . . —
§ 12. Линейные уравнения первого порядка 25
§ 13. Интегрирующий множитель 27
§ 14. Особые интегралы диференциальных уравнений первого порядка 33

Глава II. **Диференциальные уравнения второго и высших порядков.**

§ 15. Диференциальные уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$ 37
§ 16. Гиперболические функции 39
§ 17. Линейные диференциальные уравнения высших порядков . . 45
§ 18. Однородные линейные диференциальные уравнения с постоянными коэфициентами 46
§ 19. Неоднородные линейные диференциальные уравнения с постоянными коэфициентами 62
§ 20. Способ вариации произвольных постоянных 74
§ 21. Уравнение Эйлера 79

Глава III. **Эллиптические функции и функции Бесселя и связанные с ними задачи.**

§ 22. Эллиптические интегралы и эллиптические функции Якоби . 84
§ 23. Эллиптические функции Вейерштрасса 91
§ 24. Функции дзета и сигма 96
§ 25. Вычисление эллиптических функций 97
§ 26. Интегрирование уравнений посредством степенных рядов . 108
§ 27. Гамма-функции 111
§ 28. Уравнение Бесселя; функции Бесселя 113

Глава IV. **Интегрирование систем обыкновенных диференциальных уравнений**

§ 29. Общий ход решения задачи 124
§ 30. Способ Эйлера интегрирования системы линейных однородных диференциальных уравнений с постоянными коэфициентами 129

диференциальных уравнений.

§ 31. О способах отыскания приближенных решений 132
§ 32. Способ Пикара вычисления интегралов диференциальных уравнений первого порядка 133
§ 33. Способ Рунге-Кутта вычисления интегралов диференциального уравнения первого порядка 138
§ 34. Способ Рунге-Кутта вычисления интегралов системы двух уравнений первого порядка или одного уравнения второго порядка 141
§ 35. Способ Рунге-Кутта вычисления интегралов системы двух уравнений второго порядка 144
§ 36. Диференциальное уравнение „веревочной" кривой 146
§ 37. Интегрирование уравнения $y'' = f(x)$ с помощью веревочной кривой 148
§ 38. Графический способ интегрирования диференциальных уравнений второго порядка при помощи кругов кривизны . . . 149
Библиография 151

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Понятие о диференциальном уравнении. Всякое физическое явление характеризуется одной или несколькими величинами, измерить которые непосредственно удается далеко не всегда. Часто приходится довольствоваться измерением не тех величин, которые нас интересуют, а других, связанных с первыми определенными соотношениями. Соотношения эти могут быть представлены в конечной или диференциальной формах. Обычно бывает легче установить зависимость между диференциалами зависимых друг от друга величин, чем между самыми этими величинами. Объясняется это тем, что, оперируя с весьма малыми количествами, мы можем делать допущения, упрощающие задачу установления зависимости между этими количествами и не отражающиеся на результате благодаря предельному переходу. Получаемые после выполнения предельного перехода зависимости содержат производные рассматриваемых величин и носят название диференциальных уравнений.

Так как нашей конечной целью является получение зависимости в конечной форме, при которой, измерив одну величину, можно определить и другую, зависящую от первой, то, составив диференциальное уравнение и получив, таким образом, зависимость между величинами в диференциальной форме, мы должны еще решить задачу о преобразовании полученной зависимости: представление ее в конечной форме. Эта задача носит название интегрирования диференциального уравнения.

Поясним сказанное на примере из кинематики. Пусть требуется установить зависимость между путем s, пройденным некоторой точкой, и временем t, причем точка эта движется неравномерно, т. е. ее скорость v есть функция времени

$$v = \varphi(t).$$

Так как нет возможности непосредственно найти зависимость между s и t, то попытаемся установить ее для элемента пути и элемента времени. Для этого обозначим весьма малый промежуток времени через Δt и соответствующий этому промежутку времени путь через Δs. Для такого — весьма малого — промежутка времени сделаем допущение, что движение равномерное, т. е. что скорость постоянна; тогда

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Написанное равенство только приближенное; оно станет точным, если мы перейдем к пределу, полагая, что Δt стремится к нулю. Делая это, получим уже точное равенство

$$v = \frac{ds}{dt},$$

откуда

$$ds = v\,dt \quad \text{или} \quad ds = \varphi(t)\,dt.$$

Мы установили зависимость между диференциалами ds и dt и получили простейшее диференциальное уравнение.

Пусть нам было известно, что $\varphi(t) = 2t$; тогда наше диференциальное уравнение запишется так:

$$ds = 2t\,dt \quad \text{или} \quad \frac{ds}{dt} = 2t.$$

Для получения зависимости между s и t в конечной форме проинтегрируем его. Получим:

$$s = t^2 + C.$$

Произвольная постоянная C, представляющая собой начальный путь, может быть найдена лишь в том случае, если известно значение величины s для какого-либо момента времени t. Например, если известно, что $s = 0$ при $t = 0$, то и $C = 0$. Следовательно, для этого случая

$$s = t^2.$$

§ 2. Порядок и степень диференциального уравнения. Найденное в предыдущем параграфе диференциальное уравнение содержит в себе аргумент t и производную $\frac{ds}{dt}$ от неизвестной функции s по аргументу t. В более общем случае в состав диференциального уравнения могут войти не только аргумент и производная от неизвестной функции по аргументу, но и сама неизвестная функция, т. е. диференциальное уравнение может иметь вид

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

где x — аргумент, y — функция, а $y' = \frac{dy}{dx}$ — производная от y по x.

Уравнение (1), содержащее производную первого порядка, называется *диференциальным уравнением первого порядка*. Вообще: *порядком диференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в его состав*. Общий вид диференциального уравнения n-го порядка таков:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{2}$$

Степенью диференциального уравнения называют высшую степень производной высшего порядка, входящей в данное уравнение. Например, уравнение

$$(y''')^2 + xy'y''' - \left(x + \frac{1}{x}\right)(y')^4 = 0$$

— третьего порядка и второй степени[1]).

---

[1]) Понятие степени диференциального уравнения не играет сколько-нибудь заметной роли в теории этих уравнений.

Уравнение (2), в котором неизвестная функция зависит только от одного аргумента, называется **обыкновенным диференциальным уравнением**. Если же неизвестная функция, входящая в диференциальное уравнение, зависит от нескольких аргументов, то уравнение называется **диференциальным уравнением в частных производных**. Общий вид такого уравнения:

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x_m^n}\right) = 0. \qquad (3)$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_m$ обозначают независимые переменные, а z — функцию этих переменных.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только обыкновенных диференциальных уравнений.

§ 3. Диференциальное уравнение как результат исключения произвольных постоянных. В § 1 было сказано, что диференциальное уравнение может быть получено как результат отыскания зависимости между диференциалами двух физических величин. Покажем, что к диференциальному уравнению можно также прийти путем **исключения постоянных** из уравнения, выражающего связь между этими величинами в конечной форме.

Пусть дано уравнение

$$y = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \qquad (4)$$

в котором $C_1, C_2, \ldots, C_n$ обозначают какие-либо постоянные и притом произвольные величины. Требуется составить диференциальное уравнение, в которое не входили бы постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и которое бы выражало связь между x, y и производными от y по x.

Для этого продиференцировав n раз по x уравнение (4), получим:

$$y' = f'(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$
$$y'' = f''(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = f^{(n)}(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Мы получили систему, состоящую из $(n+1)$-го уравнения, считая в том числе и данное уравнение (4). Возьмем какие-либо n из уравнений этой системы и, предполагая, что эти n уравнений разрешимы относительно постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, определим значения этих постоянных в зависимости от переменной x, функции y и ее производных по x. Подставляя найденные значения величин $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в оставшееся $(n+1)$-е уравнение, мы получим зависимость

$$F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (2)$$

т. е. получим обыкновенное диференциальное уравнение n-го порядка.

Пример. Исключить постоянные C_1 и C_2 из уравнения

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Так как для исключения двух величин C_1 и C_2 надо иметь три уравнения, то, продиференцировав заданное уравнение два раза по x, будем иметь систему:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x},$$
$$y' = 2C_1e^{2x} + 3C_2e^{3x}$$

и

$$y'' = 4C_1e^{2x} + 9C_2e^{3x}.$$

Исключение постоянных C_1 и C_2 проще всего произвести так. Помножим первое уравнение на 6, второе на -5 и результаты сложим с третьим. Получим

$$y'' - 5y' + 6y = 0,$$

т. е. диференциальное уравнение второго порядка и первой степени вида

$$F(y, y', y'') = 0.$$

§ 4. Общий, частный и особый интегралы диференциального уравнения. Проинтегрировать диференциальное уравнение n-го порядка

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (2)$$

это значит найти для неизвестной функции такое выражение

$$y = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \qquad (4)$$

в состав которого вошли бы аргумент x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и которое, будучи подставлено на место y в данное уравнение (2), обратило бы его в тождество.

Выражение вида (4) называют общим интегралом (или общим решением) уравнения (2). Если мы в общем интеграле произвольным постоянным придадим какое-либо частное значение, то получим так называемый частный интеграл (или частное решение).

Так, например, для диференциального уравнения второго порядка

$$y'' + y = 0$$

функция

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

содержащая две произвольные постоянные C_1 и C_2 и удовлетворяющая уравнению (в чем нетрудно убедиться подстановкой), служит общим интегралом. Если мы, например, придадим величине C_1 значение 2, а величине C_2 — значение -3, то получим соотношение

$$y = 2 \cos x - 3 \sin x,$$

которое является частным интегралом.

Общий интеграл (4) уравнения (2) (n-го порядка) содержит n произвольных постоянных величин и может получить бесчисленное множество значений. Это объясняется тем, что с помощью уравнения (2) можно описать целый класс физических явлений. Для нахождения зависимостей, характеризующих какое-либо определенное физическое явление этого класса, т. е. для получения частного интеграла уравнения (2), мы должны определить все произвольные постоянные, входящие в его общий интеграл (4). Чтобы найти их, нам должны быть заданы дополнительные условия. Такие условия всегда и задаются (или могут быть найдены из эксперимента) и носят название начальных и граничных условий. Этих условий должно быть столько,

сколько произвольных постоянных входит в состав общего интеграла (4) (т. е. такое число их, каков порядок диференциального уравнения).

Полученное нами в § 1 уравнение

$$ds = 2tdt$$

характеризует собой целый класс равнопеременных движений точки. Общий интеграл его

$$s = t^2 + C.$$

Чтобы получить зависимость между s и t в одном вполне определенном движении, т. е. для получения из этого общего интеграла частного интеграла, мы должны каким-то образом определить произвольную постоянную C. Для этого нам было дано начальное условие, т. е. мы знали, что в начале движения (при $t = 0$) пройденный точкой путь был равен 0 ($s = 0$). Подставив в выражение общего интеграла значения s и t из этого условия, нашли значение C для нашего частного случая: $C = 0$.

Подставив же это значение C в общий интеграл

$$s = t^2 + C,$$

мы получили частный интеграл

$$s = t^2,$$

дающий в конечной форме связь между s и t для нашего частного случая.

Кроме общего интеграла, некоторые диференциальные уравнения имеют еще так называемые особые интегралы (решения). Они не могут быть получены из общего интеграла ни при каких частных значениях произвольных постоянных и этим отличаются от частных интегралов. Из общего интеграла особые интегралы могут быть получены, если величины $C_1, C_2, \ldots, C_n$ рассматривать не как постоянные, а как функции от x. Подробнее об этом сказано ниже (стр. 10 и 33).

§ 5. Интегральные кривые диференциального уравнения. Интегралы диференциального уравнения можно интерпретировать геометрически.

В выражении общего интеграла

$$y = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \tag{4}$$

диференциального уравнения

$$F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{2}$$

переменные x и y можно рассматривать как координаты точек плоских кривых, которые принято называть интегральными кривыми диференциального уравнения (2). Входящие в выражение общего интеграла (4) произвольные постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можно рассматривать как некоторые параметры. Тогда выражение (4) представит собой уравнение *семейства интегральных кривых*, изображающих частные интегралы уравнения (2), а само уравнение (2) будет диференциальным уравнением всех его интегральных кривых. Число параметров этого семейства равно числу произвольных постоянных в выражении общего интеграла (4) или порядку диференциального уравнения (2).

Процесс получения частного интеграла из общего путем нахождения произвольных постоянных сводится с геометрической точки зрения к выбору из семейства интегральных кривых той, которая соответствует дополнительным (начальным, граничным) условиям, имеющим место для данного частного случая.

Нахождение частного интеграла уравнения, разобранного нами в § 1, представляет собой выбор из семейства парабол, заданного аналитически общим интегралом

$$s = t^2 + C,$$

параболы, определяемой значением параметра C, представляющего собой в данном случае расстояние от начала координат до пересечения искомой параболы с осью s. Получив из начального условия величину C, мы нашли ту параболу, которая дает в графической форме зависимость между s и t для нашего конкретного частного случая. Поскольку C в нашем случае оказалось равным нулю, то искомая парабола — та, которая касается оси t в точке $t = 0$.

Для каждой точки каждой интегральной кривой значения x, y и y' удовлетворяют данному диференциальному уравнению, а поэтому последнему удовлетворят также значения x, y и y', взятые в любой точке огибающей этого семейства интегральных кривых (так как каждая точка огибающей принадлежит одновременно какой-либо из огибаемых, т. е. какой-либо интегральной кривой). Отсюда следует, что уравнение этой огибающей является также решением данного диференциального уравнения. Особые интегралы геометрически представляют собой огибающие семейства интегральных кривых. Ниже мы рассмотрим способы отыскания особых интегралов.

Такое наглядное представление частных и особых интегралов помогает уяснить тот, указанный нами выше, факт, что особый интеграл не может быть получен из общего ни при каких значениях произвольных постоянных.

Рассмотрим для примера диференциальное уравнение

$$yy' = -\sqrt{1-y^2} \left(\text{что можно записать так: } \frac{yy'}{\sqrt{1-y^2}} = -1\right).$$

Его общий интеграл

$$y = \pm\sqrt{1-(x-C)^2}$$

можно рассматривать как уравнение семейства интегральных кривых — кругов единичного радиуса с центрами на оси x-ов.

Каждый частный интеграл — одна из окружностей, а особые интегралы — огибающие этого семейства. В нашем случае эти огибающие — две прямые, проходящие параллельно оси x-ов на расстоянии единицы от нее, одна над, а другая под осью. Их уравнения будут

$$y = \pm 1.$$

Как нетрудно видеть, оба особые интеграла, удовлетворяя диференциальному уравнению, не принадлежат к семейству частных интегралов и поэтому не могут быть получены из общего интеграла ни при каких значениях произвольных постоянных. Для получения особого интеграла из общего, как указывалось выше, произвольные постоянные должны рассматриваться как некоторые функции от x. В нашем случае для получения особых интегралов

$$y = \pm 1$$

из общего

$$y = \pm\sqrt{1-(x-C)^2}$$

мы должны положить C равным x, т. е. считать произвольную постоянную C функцией от x $(C = x)$.

§ 6. Замечание об интегрировании диференциальных уравнений. Число видов диференциальных уравнений, которые могут быть проинтегрированы в конечном виде, весьма невелико. Сказанное относится не только к уравнениям высших порядков, но даже к целому ряду уравнений первого порядка. Это обстоятельство заставило нас

в настоящей книге ограничиться рассмотрением только отдельных типов диференциальных уравнений, знакомя читателей с частными приемами их интегрирования.

Заметим, что вопрос об интегрировании диференциального уравнения считается решенным, если нахождение неизвестной функции удается привести к квадратуре, независимо от того, выражается ли полученный интеграл в конечном виде или нет.

ГЛАВА I.

ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.

§ 7. Диференциальные уравнения с отделяющимися переменными. Если в состав диференциального уравнения первого порядка

$$F(x,\ y,\ y')=0$$

производная y' входит в первой степени, то уравнение можно представить в виде

$$\varphi(x,\ y)+\psi(x,\ y)\cdot y'=0$$

или

$$\varphi(x,\ y)\,dx+\psi(x,\ y)\,dy=0,$$

где коэфициенты $\varphi(x,\ y)$ и $\psi(x,\ y)$ при dx и dy являются функциями только от x и y.

Диференциальными уравнениями с отделяющимися переменными называются уравнения вида

$$\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)\,dx+\psi_1(x)\cdot\psi_2(y)\,dy=0, \tag{5}$$

в которых каждый из коэфициентов при диференциалах представляет собой произведение двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая — только от y.

Уравнения такого рода можно представить в виде

$$P\,dx=Q\,dy \quad \text{или} \quad P\,dx+Q\,dy=0,$$

где P зависит только от x, а Q — только от y; таким образом получаем, что левая часть равенства зависит только от x и dx, правая — от y и dy. В этом случае говорят, что переменные отделены друг от друга, и уравнение (5) называют уравнением с отделенными переменными.

Для того чтобы отделить переменные, разделим обе части уравнения (5) на произведение

$$\varphi_2(y)\cdot\psi_1(x);$$

получим уравнение с отделенными переменными

$$\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}\,dx+\frac{\psi_2(y)}{\varphi_2(y)}\,dy=0. \tag{6}$$

Интегрируя его, получаем общий интеграл в виде квадратур

$$\int \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}\,dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\psi_2(y)}\,dy = C,$$

где C — произвольная постоянная интегрирования.

„Отделение переменных, — говорит Лагранж, — по справедливости должно быть рассматриваемо как прекраснейшее средство, которое создали геометры для интегрирования уравнений первого порядка. В самом деле, после того как переменные в уравнении отделены, каждый член можно рассматривать как частный диференциал, зависящий только от одной переменной. И тогда остается лишь взять интеграл от каждого члена, присоединив к результату произвольную постоянную".

К решению диференциальных уравнений с отделяющимися переменными приводятся очень многие физические задачи. Рассмотрим некоторые из этих задач.

1. Диференциальное уравнение непрерывного роста или убывания. Пусть известно, что скорость прироста (или убывания) некоторой величины пропорциональна наличному ее количеству (т. е. имеющемуся в данный момент t). Пусть в начальный момент $t = 0$ величина была равна P_0. Требуется найти зависимость между величиной P и временем t.

Заметив, что скорость прироста выражается производной $\frac{dP}{dt}$ и обозначив положительный коэфициент пропорциональности буквой k, будем иметь

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

в случае прироста и

$$\frac{dP}{dt} = -kP$$

в случае убывания.

Отделяя в первом уравнении переменные, находим

$$\frac{dP}{P} = kt,$$

откуда, интегрируя, получим

$$P = Ce^{kt}.$$

Но так как в силу начального условия при $t = 0$ имеем $P = P_0$, то $C = P_0$ и

$$P = P_0 e^{kt}.$$

Для случая убывания будем иметь

$$P = P_0 e^{-kt}.$$

2. Диференциальное уравнение растворения твердых тел. Предположим, что при постоянной температуре скорость растворения твердого тела в жидкости пропорциональна количеству этого вещества, еще могущего раствориться в жидкости до насыщения последней (предполагается, что, во-первых, вещества, входящие в раствор, химически не действуют друг на друга, и, во-вторых, раствор еще далек от насыщения, так как иначе линейный закон для скорости растворения непри-

нением). Пусть P — количество вещества, дающее насыщенный раствор, и x — количество уже растворившегося вещества. Тогда получаем диференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = k(P - x),$$

где k — известный из опыта коэфициент пропорциональности, а t — время. Отделение переменных и затем интегрирование дают

$$x = P + Ce^{-kt}.$$

Но $x = 0$ в начальный момент при $t = 0$; поэтому $C = -P$, и окончательно,

$$x = P(1 - e^{-kt}).$$

Полученное решение дает зависимость количества растворившегося вещества от времени t.

3. Диференциальное уравнение температуры охлаждающегося тела. Пусть T — температура тела, а T_0 — температура окружающей среды и $T > T_0$. По известному закону Ньютона бесконечно малое количество теплоты dQ, отданное телом в течение бесконечно малого промежутка времени dt, пропорционально разности температур тела и окружающей среды:

$$dQ = -k(T - T_0)\,dt;$$

здесь k — коэфициент пропорциональности; знак минус поставлен потому, что потеря тепла dQ — величина отрицательная.

Но, с другой стороны, имеем

$$Q = mc(T - T_0),$$

где m — масса тела, а c — его теплоемкость. Допуская, что теплоемкость есть величина, не зависящая от температуры, найдем

$$dQ = mc\,dT.$$

Следовательно,

$$mc\,dT = -k(T - T_0)\,dt.$$

Отделив переменные и проинтегрировав это уравнение, получим

$$T = T_0 + Ce^{-\frac{kt}{mc}}.$$

Если в начальный момент (при $t = 0$) температура $T = T_1$, то

$$C = T_1 - T_0$$

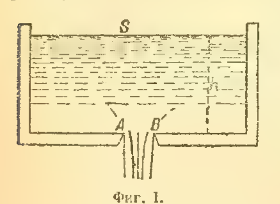
и

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)\,e^{-\frac{kt}{mc}}.$$

4. Уравнение времени, необходимого для истечения воды через отверстие в дне резервуара. Предположим, что из резервуара, имеющего форму параллелепипеда с площадью основания S (фиг. 1), истекает вода через малое круглое отверстие AB, проделанное в дне. В начальный момент $t = 0$ высота уровня воды пусть была h. В течение времени dt через отверстие пройдет объем воды, равный $\omega v\,dt$.

Здесь σ — коэфициент, величина которого зависит от диаметра отверстия и от высоты уровня воды[1]) в резервуаре, ω — площадь отверстия, а v — скорость истечения воды.

Как доказывается в курсах гидравлики, скорость v истечения из резервуаров воды со свободной поверхностью равна $\sqrt{2gz}$, где g — ускорение силы тяжести, а z — высота уровня истекающей воды. Поэтому количество воды, вытекшей за промежуток времени dt, будет



Фиг. 1.

$$\sigma\omega \sqrt{2gz}\, dt.$$

За тот же промежуток времени dt уровень воды в резервуаре понизится на $-dz$. Очевидно, что

$$-S\, dz = \sigma\omega \sqrt{2gz}\, dt.$$

Отделив переменные в полученном нами диференциальном уравнении и проинтегрировав его, получим

$$t = -\frac{S\sqrt{2z}}{\sigma\omega\sqrt{g}} + C.$$

Первоначальная высота воды в резервуаре была равна h, т. е. $z = h$ при $t = 0$. Следовательно,

$$C = \frac{S\sqrt{2h}}{\sigma\omega\sqrt{g}}.$$

Приняв это во внимание, получим окончательно

$$t = \frac{S}{\sigma\omega}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{h} - \sqrt{z}\right).$$

Время полного истечения T воды из резервуара найдем из условия, что в момент окончания истечения величина $z = 0$. Приняв это, получим

$$T = \frac{S}{\sigma\omega}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{W\sqrt{2}}{\sigma\omega\sqrt{gh}},$$

где W — первоначальный объем воды в резервуаре.

Необходимо заметить, что последнее равенство является грубым приближением, так как при малых z величину σ нельзя считать не зависящей от z.

Если, например, $h = 3$ *м*; $S = 200$ *м*²; $\omega = 1{,}25$ *м*²; $\sigma = 0{,}625$, то

$$T = \frac{\sqrt{2}\cdot 200\sqrt{3}}{0{,}625\cdot 1{,}25\cdot\sqrt{9{,}8}} = 3 \text{ мин. } 20{,}2 \text{ сек.}$$

В случае, когда горизонтальные сечения резервуара изменяются, будем иметь $S = f(z)$, и наше диференциальное уравнение напишется так:

$$\sigma\omega\sqrt{2g}\, dt = -\frac{f(z)}{\sqrt{z}}\, dz.$$

[1]) Зависимостью σ от высоты уровня воды в резервуаре в дальнейшем пренебрегаем, т. е. считаем σ не зависящим от z.

После интегрирования получим

$$t = -\frac{1}{\sigma\omega\sqrt{2g}}\int\frac{f(z)}{\sqrt{z}}dz,$$

а

$$T = -\frac{1}{\sigma\omega\sqrt{2g}}\int_h^0\frac{f(z)}{\sqrt{z}}dz = \frac{1}{\sigma\omega\sqrt{2g}}\int_0^h\frac{f(z)}{\sqrt{z}}dz.$$

5. Уравнение времени, необходимого для установления одинаковых уровней жидкости в сообщающихся сосудах. Положим, что оба сосуда имеют форму параллелепипедов, у которых площади оснований S и S_1 (фиг. 2). Количество жидкости, теряемое сосудом *I*, равно количеству жидкости, получаемому сосудом *II*. Поэтому

$$-S\,dz = S_1\,dz_1,$$

отсюда

$$dz - dz_1 = \frac{S+S_1}{S_1}dz.$$

В течение времени dt через отверстие AB площадью ω пройдет объем жидкости

$$\sigma\omega\sqrt{2g(z-z_1)}\,dt,$$

и поэтому

$$-S\,dz = \sigma\omega\sqrt{2g(z-z_1)}\,dt,$$

или

$$\frac{\sigma\omega}{S}\sqrt{2g}\,dt = -\frac{dz}{\sqrt{z-z_1}}.$$

Фиг. 2.

Полагая $z - z_1 = u$, получим $du = dz - dz_1 = \frac{S+S_1}{S_1}dz$, откуда $dz = \frac{S_1\,du}{S+S_1}$. Вследствие этого

$$\frac{\sigma\omega}{S}\sqrt{2g}\,dt = -\frac{S_1}{S+S_1}\cdot\frac{du}{\sqrt{u}},$$

а отсюда

$$\frac{\sigma\omega}{S}\sqrt{2g}\,T = -\frac{S_1}{S+S_1}\int_h^0\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{S_1}{S+S_1}\int_0^h\frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Выполняя интегрирование, найдем

$$T = \frac{SS_1\sqrt{2h}}{\sigma\omega(S+S_1)\sqrt{g}},$$

где буквой h обозначена начальная разность уровней.

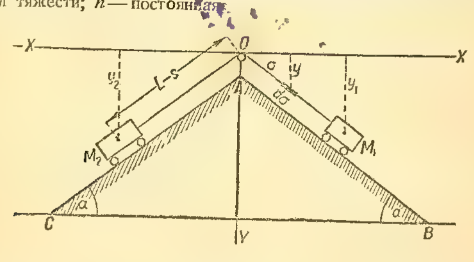
Если $S = S_1 = 100$ *м*²; $h = 2{,}5$ *м*; $\omega = 0{,}5$ *м*²; $\sigma = 0{,}62$, то будем иметь $T = 114{,}5$ сек.

6. Диференциальное уравнение движения грузоподъемных вагонеток. В виде более сложного примера рассмотрим движение механизма, известного под названием бремсберга и служащего для подъема и опускания грузов. Механизм этот состоит из двух вагонеток M_1 и M_2, соединенных канатом, перекинутым через блок O (фиг. 3). Вагонетки

движутся по рельсам, уложенным на плоскостях AB и AC, наклоненных под одним и тем же углом α к горизонтальной плоскости. Пренебрегая силами сопротивления и считая рельсы гладкими поверхностями, мы можем сказать, что вся система движется под действием силы тяжести. Эта сила имеет потенциал, и к движению системы грузов поэтому можно применить известное из механики уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i^2 v_i^2}{2} = U + h,$$

называемое интегралом живой силы. Буквы m_i и v_i обозначают массу и скорость точки (части) M_i системы. Левая часть равенства выражает живую силу системы. Буквой U обозначена потенциальная функция сил тяжести; h — постоянная.



Фиг. 3.

Пусть s есть расстояние от начала координат O до центра тяжести тележки M_1. Если L — длина всего каната, то расстояние от начала O до центра тяжести тележки M_2 равно $L - s$. В таком случае абсолютная величина скорости тележки M_1 и части каната OM_1 равна $\frac{ds}{dt}$, так же как и абсолютная величина скорости тележки M_2 и части каната OM_2. Вследствие этого живая сила всей нашей системы

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i^2 v_i^2}{2} = \frac{1}{2}\left[m_1 + m_2 + qs + q(L-s)\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + qL)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

где m_1 и m_2 — массы тележек, а q — масса единицы длины каната.

Теперь найдем потенциальную функцию U действующих сил тяжести, приняв во внимание, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z,$$

где X, Y и Z — проекции силы тяжести на координатные оси. Начнем с определения потенциальной функции U_1 для силы тяжести тележки M_1.

Вес тележки M_1 равен m_1g; его проекции на координатные оси будут $X_1=0$, $Y_1=m_1g$ и $Z_1=0$, откуда

$$U_1=\int_0^{y_1} m_1g\,dy=m_1gy_1=m_1gs\sin\alpha.$$

Таким же способом получим, что

$$U_2=m_2g(L-s)\sin\alpha.$$

Вес элемента $d\sigma$ каната равен $qgd\sigma$. Его потенциальная функция равна $qgyd\sigma=qg\sigma\sin\alpha\,d\sigma$, где σ — расстояние от начала координат до элемента $d\sigma$, а y — его ордината. Потенциальная функция веса всей части OM_1 каната

$$U_3=qg\sin\alpha\int_0^s \sigma d\sigma=qg\sin\alpha\cdot\frac{s^2}{2}.$$

Таким же способом получим, что потенциальная функция веса части OM_2 каната

$$U_4=qg\sin\alpha\,\frac{(L-s)^2}{2}.$$

Так как $U=U_1+U_2+U_3+U_4$, то интеграл живой силы нашей системы запишется так:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{m_iv_i^2}{2}=\frac{1}{2}(m_1+m_2+qL)\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=$$
$$=g\sin\alpha\,[(m_1-m_2-qL)s+qs^2]+g\sin\alpha\left(m_2L+\frac{qL^2}{2}\right)+h.$$

Для определения h воспользуемся начальными условиями: при $t=0$ пусть будет $s=0$ и $\frac{ds}{dt}=0$. Отсюда найдем, что

$$h=-g\sin\alpha\left(m_2L+\frac{qL^2}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2+qL)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=g\sin\alpha\,[(m_1-m_2-qL)s+qs^2].$$

Если введем обозначения

$$k^2=\frac{q}{m_1-m_2-qL}\quad\text{и}\quad 2n^2=\frac{qg\sin\alpha}{m_1+m_2+qL},$$

то будем иметь $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{4n^2}{k^2}(s+k^2s^2)$, а после отделения переменных $\frac{kds}{2\sqrt{k^2s^2+s}}=ndt.$

Положим теперь $k^2s+1=z^2$; в таком случае $\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}=ndt.$

Интегрирование дает

$$\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)=nt+C\quad\text{или}\quad\ln\left(\sqrt{1+k^2s}+k\sqrt{s}\right)=nt+C.$$

В силу начальных условий $C=0$, а значит

$$\sqrt{1+k^2s}+k\sqrt{s}=e^{nt}.$$

Умножение обеих частей последнего равенства на $\sqrt{1+k^2s}-k\sqrt{s}$ дает

$$e^{-nt}=\sqrt{1+k^2s}-k\sqrt{s};$$

теперь вычтем это равенство из предыдущего. После возведения результата в квадрат получим

$$k^2s=\left(\frac{e^{nt}-e^{-nt}}{2}\right)^2, \quad \text{т. е.} \quad s=\frac{1}{k^2}\operatorname{sh}^2 nt,$$

или

$$s=\frac{m_1-m_2-qL}{q}\operatorname{sh}^2 nt.$$

При числовых данных для каждого момента t можно вычислить расстояние s, пользуясь таблицами гиперболических функций.

§ 8. О полных диференциалах. Рассмотрим выражение

$$M\,dx+N\,dy,$$

в котором $M=\varphi(x, y)$ и $N=\psi(x, y)$, и выясним, при каком условии оно представляет собой полный диференциал от некоторой функции U и как эту функцию найти.

Для этого докажем два положения:

1) если выражение $M\,dx+N\,dy$ есть полный диференциал некоторой функции U, то имеет место соотношение

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x};$$

2) если имеет место это соотношение, то всегда можно найти такую функцию U, для которой наше выражение служит полным диференциалом.

Начнем с доказательства первого положения.

По условию $M\,dx+N\,dy=dU$. Но известно, что

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}\,dx+\frac{\partial U}{\partial y}\,dy.$$

Стало быть

$$M\,dx+N\,dy=\frac{\partial U}{\partial x}\,dx+\frac{\partial U}{\partial y}\,dy.$$

Так как величины dx и dy совершенно произвольны, то последнее равенство возможно лишь в том случае, когда

$$M=\frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{и} \quad N=\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Диференцируя первое из этих равенств по y, а второе по x, имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}.$$

Но так как

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}, \quad \text{то} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}.$$

Докажем второе положение. Пусть

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (7)$$

Покажем, что из уравнения

$$dU = M\,dx + N\,dy \tag{8}$$

всегда можно найти функцию U. Прежде всего будем интегрировать выражение $M\,dx$, рассматривая y как постоянное. Обозначая результат интегрирования буквой V, получим

$$V = \int M\,dx.$$

Но

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy = M\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy.$$

Вычитая это равенство из (8), имеем

$$d(U - V) = \left(N - \frac{\partial V}{\partial y}\right)dy. \tag{9}$$

В этом уравнении все известно, кроме функции U. Из него можно будет определить $U - V$, а стало быть и U, в том лишь случае, когда выражение

$$N - \frac{\partial V}{\partial y}$$

есть функции от одного только y.

Чтобы проверить это обстоятельство, продифференцируем рассматриваемое выражение по x. Мы получим

$$\frac{\partial\left(N - \frac{\partial V}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

в силу условия (7). Следовательно, $N - \frac{\partial V}{\partial y}$ не зависит от x и есть функция одного y. Теперь имеем

$$U - V = \int\left(N - \frac{\partial V}{\partial y}\right)dy,$$

откуда находим U.

Сказанное можно распространить на случай многих переменных. Можно доказать, что для нахождении функции U из уравнения

$$dU = M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}; \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}. \tag{10}$$

7. *Работа сил, имеющих потенциал.* Если точка движется под действием силы F, проекции которой на координатные оси равны X, Y и Z, и проходит элементарный путь ds, то работа dT, совершаемая силой F на протяжении этого пути, определяется равенством

$$dT = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

где dx, dy и dz — проекции пути ds на координатные оси. Работа вообще зависит от длины пройденного пути. Но существует весьма

важный случай, когда для вычисления работы нет необходимости знать, по которому из путей S_1, S_2 или S_3 (фиг. 4) переместилась точка, а достаточно знать только ее начальное положение M_1 и конечное M_2. Это тот случай, когда проекции X, Y и Z силы являются частными производными от некоторой функции U соответственно по x, y и z, т. е.

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{и} \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Функция U называется потенциальной или силовой функцией, а сила F — силой, имеющей потенциал. В этом случае

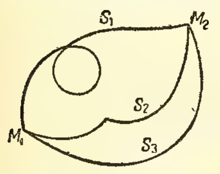
$$dU = Xdx + Ydy + Zdz$$

и, следовательно,

$$dT = dU.$$

Интегрируя это равенство от начального положения точки M_1 до конечного M_2, находим

$$T = U_2 - U_1.$$



Фиг. 4.

Это значит, что работа силы, имеющей однозначный потенциал, не зависит от формы траектории и равна разности между значениями потенциальной функции в конечной и в начальной точках.

Заметим, что проекции X, Y и Z силы, имеющей потенциал, должны удовлетворять условиям:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Мы видим, что свойства полного диференциала находят себе ближайшее приложение в учении о работе.

§ 9. Уравнения, левая часть которых есть полный диференциал. Если дано уравнение

$$Mdx + Ndy = 0,$$

левая часть которого есть полный диференциал некоторой функции U, то будем иметь

$$dU = 0,$$

откуда общий интеграл

$$U = \text{const}.$$

Пример 1. $(3x^2y + \ln y)\,dx + \left(x^3 + \frac{x}{y} + \cos y\right) dy = 0.$

Здесь

$$M = 3x^2y + \ln y, \quad N = x^3 + \frac{x}{y} + \cos y;$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + \frac{1}{y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + \frac{1}{y}.$$

Стало быть $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, а следовательно, из уравнения

$$dU = (3x^2y + \ln y)\,dx + \left(x^3 + \frac{x}{y} + \cos y\right) dy$$

можно найти функцию U.

Рассматривая y как постоянное, находим сначала

$$V = \int (3x^2y + \ln y)\,dx = x^3y + x\ln y,$$

затем

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy = (3x^2y + \ln y)\,dx + \left(x^3 + \frac{x}{y}\right)dy$$

и, далее,

$$d(U - V) = \cos y\,dy \quad \text{и} \quad U - V = \sin y,$$

т. е.

$$U = x^3y + x\ln y + \sin y.$$

Общий интеграл

$$x^3y + x\ln y + \sin y = C.$$

Пример 2. $(2xy + z^2 + yz)\,dx + (x^2 + 2yz + xz)\,dy + (y^2 + 2zx + xy + \cos z)\,dz = 0.$

Условия (8) в данном случае имеют место, что нетрудно проверить. Ищем функцию U, определяемую равенством

$$dU = (2xy + z^2 + yz)\,dx + (x^2 + 2yz + xz)\,dy + (y^2 + 2zx + xy + \cos z)\,dz.$$

Считая y и z постоянными, находим интеграл

$$V = \int (2xy + z^2 + yz)\,dx = x^2y + xz^2 + xyz.$$

Диференцируя, имеем

$$dV = (2xy + z^2 + yz)\,dx + (x^2 + xz)\,dy + (2zx + xy)\,dz.$$

Вычитая dV из dU, получим

$$d(U - V) = 2yzdy + (y^2 + \cos z)\,dz.$$

Считая z постоянным, находим интеграл

$$W = \int 2yzdz = y^2z.$$

Далее,

$$dW = 2yzdy + y^2dz.$$

Вычитаем dW из $d(U - V)$; находим

$$d(U - V - W) = \cos z dz, \quad \text{т. е.} \quad U - V - W = \sin z.$$

Отсюда $U = V + W + \sin z = x^2y + xz^2 + xyz + y^2z + \sin z.$

Общий интеграл

$$x^2y + xz^2 + xyz + y^2z + \sin z = C.$$

Кроме указанного сейчас приема дадим еще один способ отыскания функции по ее полному диференциалу.

Пусть дано

$$dU = M\,dx + N\,dy$$

при условии

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial U}{\partial x} = M$. Так как при составлении этой производной аргумент y рассматривался как постоянная, то

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M\,dx + \varphi(y). \tag{11}$$

Здесь x_0 — некоторое фиксированное значение x. Точно так же найдем

$$U(x, y) = \int_{y_0}^{y} N(x, y)\, dy + \psi(x), \tag{11a}$$

где y_0 — также некоторое фиксированное значение y. Полагая в (11) и в (11a) $x = x_0$ и сравнивая результаты, найдем

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\, dy + \psi(x_0).$$

Но формула (11a) дает

$$\psi(x_0) = U(x_0, y_0).$$

Подставив последние два выражения в (11), найдем

$$U(x, y) = U(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\, dy. \tag{12}$$

Таким же образом можно получить формулу

$$U(x, y) = U(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)\, dy. \tag{12a}$$

Аналогичная формула для случая трех переменных

$$dU = M\, dx + N dy + P\, dz$$

будет

$$U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0) + \int_{x_0}^{x} M(x, y, z)\, dx +$$

$$+ \int_{y_0}^{y} N(x_0, y, z)\, dy + \int_{z_0}^{z} P(x_0, y_0, z)\, dz.$$

Пример 3. Проинтегрировать уравнение

$$(2x \sin y - y \cos x + \ln x)\, dx + (x^2 \cos y - \ln y - \sin x)\, dy = 0.$$

Так как $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \cos y - \cos x = \frac{\partial N}{\partial x}$, то левая часть уравнения есть полный диференциал функции U. Согласно (12), полагая

$$x_0 = y_0 = 0,$$

имеем

$$U = U(0, 0) + \int_{0}^{x} (2x \sin y - y \cos x + \ln x)\, dx - \int_{0}^{y} \ln y dy,$$

т. е.

$$U = U(0, 0) + (x^2 \sin y - y \sin x + x \ln x - x) \Big|_0^x - y \ln y \Big|_0^y.$$

Общий интеграл

$$x^2 \sin y - y \sin x + x \ln x - x - y \ln y + y = C,$$

где

$$C = -U(0, 0) = 0.$$

§ 10. **О методах интегрирования дифереициальных уравнений первого порядка.** Рассмотренные нами выше уравнения с отделяющимися переменными и полными дифенциалами представляют собой два простейших типа уравнений первого порядка. При интегрировании прочих типов уравнений первого порядка обычно стараются сперва привести их к одному из этих двух основных типов. Для достижения этой цели существуют два метода: 1) отделение переменных и 2) метод интегрирующего множителя. Сначала мы познакомим читателя с двумя типами уравнений — однородными и линейными, в которых можно произвести отделение переменных в общем виде. Затем вкратце изложим метод интегрирующего множителя и дадим ряд примеров на применение этого метода.

§ 11. **Однородные уравнения.** Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией этих переменных порядка m, если при любом t справедливо тождество

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Полагая в этом тождестве $t = \frac{1}{x}$, находим

$$f(x, y) = x^m f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Отметим, что $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ зависит только от одной переменной $\frac{y}{x}$. ы подчеркнем это обстоятельство, введя обозначение

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однородная функция характеризуется, таким образом, тождеством

$$f(x, y) = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Например, функция

$$f(x, y) = x^3 + x^2 y - y^3 e^{\frac{y}{x}} = x^3\left(1 + \frac{y}{x} - \frac{y^3}{x^3} e^{\frac{y}{x}}\right) = x^3 f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

— однородная, третьего измерения.

Если в диференциальном уравнении

$$M dx + N dy = 0$$

коэфициенты M и N суть однородные функции одного и того же измерения, то уравнение называют однородным. Переменные могут быть в нем отделены подстановкой

$$y = tx,$$

где t — новая переменная. В самом деле, если M и N — однородные функции измерения m, то

$$M = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad N = x^m \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

и диференциальное уравнение можно написать так:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0.$$

Но $\frac{y}{x}=t$ и $dy=xdt+tdx$. Поэтому уравнение будет

$$[\varphi(t)+t\psi(t)]\,dx+x\psi(t)\,dt=0$$

или

$$\frac{dx}{x}+\frac{\psi(t)\,dt}{\varphi(t)+t\psi(t)}=0.$$

Здесь переменные отделены. Интегрируя, получим

$$\ln x+\int\frac{\psi(t)\,dt}{\varphi(t)+t\psi(t)}=C.$$

Это есть общий интеграл.

Пример. $(x^2-xy)\,dy+y^2\,dx=0$.

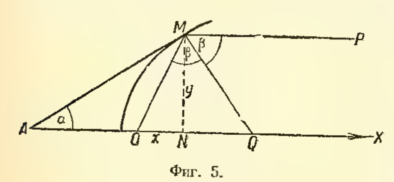
Полагая $y=tx\,(dy=xdt+tdx)$, после подстановки и сокращения на x^2 получим

$$(1-t)\,xdt+tdx=0 \quad \text{или} \quad \frac{dx}{x}+\left(\frac{1}{t}-1\right)dt=0.$$

Интегрирование дает $\ln x+\ln t-t=\ln C$ или

$$y=Ce^{\frac{y}{x}}.$$

8. *Отражательная поверхность.* Определим форму зеркала, отражающего все лучи, исходящие из данной точки O, параллельно данному направлению OX. Принимая точку O (фиг. 5) за начало координат, предположим, что OM есть один из лучей, отражаемых по направлению $MP \parallel OX$.



Фиг. 5.

Поверхность зеркала пересекает плоскость чертежа по некоторой кривой, проходящей через точку M. Нормаль к кривой в этой точке будет биссектрисой $\angle OMP$, т. е. линией MQ; касательная к искомой кривой — AM. Обозначив координаты точки M через x и y, будем иметь

$$OA=OQ=OM=\sqrt{x^2+y^2},$$

а из треугольника NMA: $y=(\sqrt{x^2+y^2}+x)\operatorname{tg}\alpha$. Но $\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}$; следовательно,

$$ydx=(\sqrt{x^2+y^2}+x)\,dy.$$

Мы получили однородное диференциальное уравнение. Чтобы отделить переменные в нем, положим $x=ty$; тогда $dx=ydt+tdy$. После подстановки и сокращения на y получим

$$ydt=\sqrt{1+t^2}\,dy; \quad \frac{dy}{y}=\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Интегрирование дает $\ln y=\ln(t+\sqrt{1+t^2})+\ln C$, или

$$y^2=C^2+2Cx.$$

Искомая кривая — парабола, в фокусе которой помещается источник света. Отражательная поверхность — параболоид вращения.

§ 12. Линейные уравнения первого порядка. Так называют уравнения вида

$$y' + Py = Q, \tag{13}$$

в которых коэфициенты P и Q суть функции только от x. Применим к его интегрированию способ Эйлера — способ введения произвольных функций. Положим

$$y = uv,$$

где u и v — некоторые неизвестные функции от x.

Внося значение y в уравнение (13), получим

$$u'v + u(v' + Pv) = Q.$$

Функцию v выберем так, чтобы

$$v' + Pv = 0;$$

в таком случае $u'v = Q$.

Из этих двух уравнений мы определим функции u и v. Частное решение $(C = 0)$ первого уравнения будет

$$\ln v + \int P dx = 0 \quad \text{или} \quad v = e^{-\int P dx}.$$

Подстановка v во второе уравнение дает

$$du = Qe^{\int P dx} dx,$$

откуда

$$u = \int Qe^{\int P dx} dx + C$$

и, следовательно, общий интеграл

$$y = e^{-\int P dx} \left[\int Qe^{\int P dx} dx + C \right]. \tag{14}$$

Пример. $y' + \frac{y}{1+x} = \frac{\cos x}{1+x}$.

Полагая $y = uv$, имеем

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{1+x}\right) = \frac{\cos x}{1+x}.$$

Выбираем функцию v так, чтобы

$$v' + \frac{v}{1+x} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{1+x}.$$

Отсюда $v = \frac{1}{1+x}$, следовательно,

$$\frac{du}{dx} = \cos x, \quad u = \sin x + C,$$

а

$$y = \frac{\sin x + C}{1+x}.$$

9. Диференциальное уравнение силы переменного тока в случае, когда в цепи есть самоиндукция и омическое сопротивление. Предположим, что в цепи, омическое сопротивление которой равно R, сила

тока I возбуждается электродвижущей силой E. Самоиндукция равна L. Пусть известно, что электродвижущая сила меняется по закону

$$E = E_0 \sin \omega t, \tag{15}$$

где E_0 и ω — постоянные. Требуется определить силу тока в момент t, зная, что в момент $t = 0$ она равна нулю: $I_0 = 0$.

Известно, что для силы тока I и сопротивления R потеря напряжения равна $R \cdot I$. Для цепи же с самоиндукцией L потеря напряжения равна $L \frac{dI}{dt}$. Поэтому полная потеря напряжения во всей цепи будет

$$E = RI + L \frac{dI}{dt}.$$

Заменяя электродвижущую силу E ее значением из (15), мы видим, что нахождение силы тока I приводится к интегрированию линейного диференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E_0}{L} \sin \omega t, \tag{16}$$

в котором коэфициенты $P = \frac{R}{L}$ и $Q = \frac{E_0}{L} \sin \omega t$. Общий его интеграл согласно (10) будет

$$I = e^{-\frac{R}{L}t} \left[\frac{E_0}{L} \int e^{\frac{Rt}{L}} \sin \omega t dt + C \right].$$

Но, так как

$$\int e^{\frac{Rt}{L}} \sin \omega t dt = \frac{Le^{\frac{Rt}{L}} (R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t)}{R^2 + \omega^2 L^2},$$

то

$$I = \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t) + Ce^{-\frac{Rt}{L}}.$$

Принимая во внимание, что $I = I_0 = 0$ в момент $t = 0$, находим

$$C = \frac{E_0 L\omega}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Поэтому

$$I = \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t + L\omega e^{-\frac{Rt}{L}}).$$

Это равенство представляет частный интеграл уравнения (16). Представим его в более удобном для вычисления виде. Полагая отвлеченное число $\frac{L\omega}{R} = \operatorname{tg} \varphi$ (угол φ называется **смещением фазы**), получим $R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t = \frac{R \sin (\omega t - \varphi)}{\cos \varphi} = R\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \sin (\omega t - \varphi) = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \sin (\omega t - \varphi)$, что даст

$$I = \frac{E_0 L\omega e^{-\frac{Rt}{L}}}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{E_0 \sin (\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Сила тока, как показывает это равенство, состоит из двух частей: первая имеет характер затухания (множитель $e^{-\frac{Rt}{L}}$); вторая — характер периодический [множитель $\sin (\omega t - \varphi)$].

Пусть $E_{max} = E_0 = 650$ V, самоиндукция $L = 0,0937$ H, сопротивление $R = 4,58\ \Omega$ и частота $f = 60$ Hz. В таком случае круговая частота $\omega = 2\pi f = 120 \cdot 3,14 = 376,8$ и

$$\frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = 18,89 \text{ A}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R} = 7,71;$$

смещение фаз $\varphi = 82°36'$, отношение $\frac{R}{L} = 48,9$. Вследствие этого сила тока

$$I = 18,89 \left[\frac{35,3}{35,59} e^{-48,9t} + \sin(\omega t - \varphi) \right].$$

Первое слагаемое суммы, стоящей в скобках, имеющее в момент $t = 0$ значение, близкое к единице, с течением времени весьма быстро убывает и в дальнейшем силу тока можно считать меняющейся согласно формуле

$$I = 18,89 \sin(\omega t - \varphi) \text{ ампер.}$$

§ 13. Интегрирующий множитель. Рассмотренные выше диференциальные уравнения — однородное и линейные первого порядка — представляют типы уравнений, интегрируемых методом отделения переменных. Сейчас мы остановимся еще вкратце на применении к интегрированию уравнений метода интегрирующего множителя. Сущность этого метода состоит в том, чтобы найти такой множитель, после умножения на который левая часть уравнения $F(x, y, y') = 0$ становится полным диференциалом. И если это достигнуто, то далее применяется прием, изложенный в § 9.

Пусть дано уравнение

$$M\,dx + N\,dy = 0, \tag{17}$$

левая часть которого не есть полный диференциал. Будем искать такой множитель

$$\mu = \varphi(x, y),$$

чтобы левая часть уравнения

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$$

была полным диференциалом. Согласно сказанному в § 8 множитель μ должен удовлетворять условию $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$, которое можно переписать в виде

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right). \tag{18}$$

Мы видим, что искомый множитель μ удовлетворяет уравнению (18) с частными производными, и чтобы его найти, надо это уравнение проинтегрировать. Но так как интегрирование уравнения (18) с частными производными есть задача, вообще говоря, более сложная, чем интегрирование данного уравнения (17), то на первый взгляд выходит, что, отыскивая интегрирующий множитель, мы только усложнили задачу. Но дело в том, что для нахождения μ надо знать только частное решение уравнения (18), и поэтому вопрос в некоторых случаях становится легко разрешимым.

Чтобы показать, как он именно решается, остановимся на каком либо частном случае отыскания интегрирующего множителя. Относительно этого множителя сделаем такое предположение: пусть он будет

функцией только от x, и посмотрим, при каком условии уравнение (17) может иметь такой интегрирующий множитель. Если $\mu = \varphi(x)$, то $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, и уравнение (18) можно представить в виде

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

Так как здесь левая часть равенства есть функция только от одного x, то и правая

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

должна быть тоже функцией только от x. В этом именно и заключается условие того, что уравнение (17) имеет интегрирующий множитель, являющийся функцией только от x. Сам множитель, как это нетрудно видеть,

$$\mu = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx}.$$

Мы, конечно, могли бы относительно множителя μ поставить и другие требования; например, чтобы он был функцией только от y, либо только от $x + y$, либо от $x^2 - y$ и т. п. Каждое из этих требований привело бы нас к специальному условию, аналогичному тому, которое мы нашли в разобранном случае.

Пример. $(2y + xy^3)\,dx + (x + x^2y^2)\,dy = 0$.
Для этого уравнения

$$M = 2y + xy^3, \quad N = x + x^2y^2; \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2 + 3xy^2,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 1 + 2xy^2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1 + xy^2}{x + x^2y^2} = \frac{1}{x}.$$

Мы видим, что для него существует интегрирующий множитель, зависящий только от x, и этот множитель

$$\mu = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x.$$

Умножая на него наше уравнение, получим

$$(2xy + x^2y^3)\,dx + (x^2 + x^3y^2)\,dy = 0.$$

Левая часть этого уравнения есть полный диференциал, что нетрудно проверить. Интегрировать его можно по способу, изложенному в § 9. Но проще переписать наше уравнение в форме

$$2xy\,dx + x^2\,dy + \frac{1}{3}(3x^2y^3\,dx + 3y^2x^3\,dy) = 0,$$

или

$$d(x^2y) + \frac{1}{3}d(x^3y^3) = 0,$$

а затем интегрировать. Общий интеграл его будет

$$3x^2y + x^3y^3 = C.$$

Для линейного уравнения первого порядка

$$y' + Py - Q = 0$$

имеем

$$N = 1 \text{ и } M = Py - Q.$$

Выражение $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=P$ есть функция только от x. Следовательно, интегрирующий множитель

$$\mu=e^{\int P dx}.$$

В дальнейшем нам придется встретиться с условием существования интегрирующего множителя для выражения

$$M dx+N dy+P dz, \tag{19}$$

коэфициенты M, N и P которого зависят от аргументов x, y и z. Обозначив этот множитель буквой μ и умножая на него рассматриваемое выражение, мы получим полный диференциал

$$dU=\mu M dx+\mu N dy+\mu P dz,$$

по отношению к которому должны иметь место условия (10), т. е.

$$\frac{\partial(\mu N)}{\partial z}=\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\mu P)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu M)}{\partial z} \quad \text{и} \quad \frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x};$$

эти равенства в раскрытом виде будут:

$$\mu\left(\frac{\partial N}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=P\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial z},$$

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)=M\frac{\partial\mu}{\partial z}-P\frac{\partial\mu}{\partial x},$$

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}.$$

Умножая их соответственно на M, N и P и складывая результаты, находим

$$M\left(\frac{\partial N}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)+N\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)+P\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0.$$

Полученное равенство выражает условие, необходимое для того, чтобы выражение (19) имело интегрирующий множитель. Будучи необходимым условием, оно в то же время и достаточно; на выяснении его достаточности мы здесь, однако, останавливаться не будем.

10. *Диференциальное уравнение силы тока при переменном сопротивлении цепи.* При интегрировании диференциального уравнения силы переменного тока мы в *9* рассматривали сопротивление R как величину постоянную. Но в течение того периода времени, когда ток выключается, сопротивление R является величиной переменной; пусть зависимость R от времени может быть выражена формулой

$$R=\frac{R_0\tau}{\tau-t},$$

где R_0 — начальное (постоянное) значение R; τ — промежуток времени до момента выключения и t — время.

Диференциальное уравнение, соответствующее этому явлению, таково:

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R_0\tau I}{(\tau-t)L}-\frac{E}{L}=0. \tag{20}$$

Считая электродвижущую силу E постоянной, будем искать решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $I = I_0 = \frac{E}{R_0}$ при $t = 0$.

Применим метод интегрирующего множителя. Для данного случая при $P = \frac{R_0\tau}{(\tau - t)L}$ этот множитель

$$\mu = e^{\int P dt} = e^{-\frac{R_0\tau}{L}\ln(\tau - t)} = (\tau - t)^{-\frac{R_0\tau}{L}}.$$

Уравнение (20) после умножения на μ принимает вид

$$(\tau - t)^{-\frac{R_0\tau}{L}} \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{R_0\tau}{L}(\tau - t)^{-\frac{R_0\tau}{L} - 1} \cdot I = \frac{E}{L}(\tau - t)^{-\frac{R_0\tau}{L}},$$

или

$$\frac{d}{dt}\left[(\tau - t)^{-\frac{R_0\tau}{L}} \cdot I\right] = \frac{E}{L}(\tau - t)^{-\frac{R_0\tau}{L}},$$

откуда

$$I = (\tau - t)^{\frac{R_0\tau}{L}}\left[\frac{E}{L}\int(\tau - t)^{-\frac{R_0\tau}{L}} \cdot dt + C\right].$$

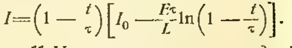
Если $\frac{L}{R_0} \neq \tau$, то, выполнив квадратуру, получим

$$I = \frac{E}{R_0\tau - L}(\tau - t) + C(\tau - t)^{\frac{R_0\tau}{L}}.$$

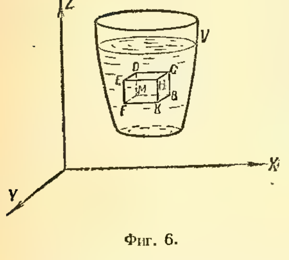
В силу начальных условий, полагая в этом равенстве $t = 0$, находим $I_0 = \frac{E\tau}{R_0\tau - L} + C\tau^{\frac{R_0\tau}{L}}$. И, следовательно,

$$I = \frac{E}{R_0\tau - L}(\tau - t) + \left[I_0 - \frac{E\tau}{R_0\tau - L}\right]\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{\frac{R_0\tau}{L}}.$$

Если $\frac{L}{R_0} = \tau$, то после выполнения преобразований будем иметь



$$I = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)\left[I_0 - \frac{E\tau}{L}\ln\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)\right].$$



Фиг. 6.

11. Уравнения равновесия жидкой массы. Предположим, что в сосуде V (фиг. 6) содержится покоящаяся жидкость, частицы которой мы отнесем к координатной системе x, y, z. Рассмотрим элемент жидкости, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, вершина M которого имеет координаты x, y и z, а ребра — dx, dy и dz — параллельны координатным осям. Если буквой ρ обозначим плотность жидкости в точке M, то масса элемента будет равна $\rho dx dy dz$.

Будем рассматривать жидкость как деформируемое сплошное тело, которое в состоянии равновесия не испытывает ни касательных напряжений, ни натяжений, но может оказать и само испытывает только давления. Заметим, что термином жидкость в гидростатике и гидро-

динамике обозначают не только жидкость в общепринятом значении этого слова, но также и газообразные вещества. Первые называют капельными жидкостями и считают, что сжимаемостью их можно пренебречь, вторые же, в отличие от первых, названы сжимаемыми жидкостями.

Из сказанного выше следует, что на грани параллелепипеда действуют нормальные к граням давления. Кроме этих сил, на параллелепипед могут действовать еще и объемные силы (например, сила тяжести). Если мы обозначим буквами X, Y и Z составляющие объемной силы, действующей на единицу массы, то проекции этой силы, приложенной к параллелепипеду, будут

$$\rho X dx dy dz, \quad \rho Y dx dy dz \quad \text{и} \quad \rho Z dx dy dz.$$

Пусть p есть давление жидкости в точке M. Оно является функцией от координат этой точки. Силы давления на грани $MDEF$ и $BCHK$ соответственно будут

$$p\,dy dz \quad \text{и} \quad -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy dz.$$

Сумма проекций на ось OX всех приложенных к параллелепипеду сил, как это нетрудно видеть, выразится так:

$$p\,dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy dz + \rho X dx dy dz,$$

или после сокращений

$$\left(\rho X - \frac{\partial p}{\partial x}\right) dx dy dz.$$

Точно так же суммы проекций всех сил на оси OY и OZ соответственно будут

$$\left(\rho Y - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx dy dz \quad \text{и} \quad \left(\rho Z - \frac{\partial p}{\partial z}\right) dx dy dz.$$

Составляя уравнения равновесия, мы приравняем эти суммы нулю. В результате получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y \quad \text{и} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z. \tag{21}$$

Заметим, что полученные три уравнения равновесия равносильны одному такому уравнению:

$$dp = \rho (X dx + Y dy + Z dz). \tag{22}$$

Так как левая часть этого уравнения есть полный диференциал, то и правая его часть должна быть полным же диференциалом. Отсюда заключаем: равновесие жидкости возможно лишь в том случае, когда действующая на нее объемная сила (X, Y, Z) такова, что выражение

$$X dx + Y dy + Z dz$$

имеет интегрирующий множитель; для существования же последнего, как выше было отмечено, необходимо и достаточно, чтобы

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0.$$

В случае, когда плотность ρ постоянна, для равновесия жидкости необходимо, чтобы выражение

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

было полным диференциалом. Для этого в свою очередь необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z} \quad \text{и} \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Обратимся теперь к применению полученных нами уравнений равновесия жидкой массы.

12. Зависимость между давлением атмосферы и высотой над уровнем моря. Предположим, что рассматриваемая жидкая среда представляет собой атмосферу. Давление атмосферы на уровне моря (при $z = 0$) обозначим через p_0, а на высоте z — через p. Соответствующие плотности воздуха пусть будут ρ_0 и ρ. В силу уравнения, характеризующего газообразное состояние, будем иметь (уравнение Клапейрона)

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} = RT,$$

где R — газовая постоянная, а T — абсолютная температура. Предположим, что температура есть линейная функция от высоты, т. е. что

$$T - T_0 - \lambda z,$$

где λ — постоянный коэфициент. В таком случае

$$\rho = \frac{p}{R(T_0 - \lambda z)}.$$

Принимая еще во внимание, что проекции силы тяжести, отнесенной к единице массы, будут

$$X = 0, \quad Y = 0 \quad \text{и} \quad Z = -g,$$

мы сможем третье уравнение системы (21) написать в виде

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pg}{R(T_0 - \lambda z)}.$$

Отсюда

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{g}{RT_0}\int_0^z \frac{dz}{1 - \frac{\lambda}{T_0}z}.$$

Искомая зависимость между давлением p и высотой z имеет вид

$$p = p_0\left(1 - \frac{\lambda z}{T_0}\right)^{\frac{g}{\lambda R}}.$$

13. Свободная поверхность жидкости во вращающемся цилиндрическом сосуде. Применим уравнение (22) к исследованию формы, которую принимает свободная поверхность жидкости, заключенной в цилиндрический сосуд, вращающийся около своей геометрической оси, располо-

женной вертикально. Ось вращения мы примем за ось OZ, которую направим вверх. Оси OX и OY предположим вращающимися вместе с сосудом. Рассмотрим какой-нибудь жидкий элемент, координаты которого пусть будут x, y и z, а масса dm. Проекции силы веса элемента на координатные оси будут $0, 0$ и $-gdm$. Если обозначим буквой r расстояние элемента от оси OZ, то его центробежная сила будет $\omega^2 rdm$, а ее проекции на оси будут

$$\omega^2 xdm \quad \text{и} \quad \omega^2 ydm.$$

Здесь через ω обозначена угловая скорость вращения сосуда. Эту скорость мы примем постоянной. Проекции объемных сил, отнесенных к единице массы, представятся так:

$$X = \omega^2 x, \quad Y = \omega^2 y, \qquad Z = -g.$$

Тогда уравнение (22) примет вид

$$dp = \omega^2 \rho (xdx + ydy) - g\rho dz,$$

где ρ — плотность жидкости (плотность жидкости постоянна). Отсюда

$$p = \frac{\omega^2 \rho}{2}(x^2 + y^2) - g\rho z + \text{const}.$$

На свободной поверхности жидкости давление p равно атмосферному и есть величина постоянная. Мы видим поэтому, что поверхность жидкости есть параболоид вращения.

§ 14. Особые интегралы диференциальных уравнений первого порядка. Если дано уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \tag{23}$$

общий интеграл которого есть

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{24}$$

то особым решением (23) называется всякое выражение

$$y = \psi(x),$$

которое, удовлетворяя уравнению (23), не может быть получено из общего интеграла (24) ни при каких частных значениях произвольной постоянной C.

Особые решения, известные уже Лейбницу и Иоганну Бернулли, считались долгое время парадоксальными. Лаплас и в особенности Лагранж разъяснили их истинную природу. Они дали два способа нахождения особых решений диференциальных уравнений первого порядка. Первый способ — способ Лагранжа — требует знания общего интеграла. Второй способ — способ Лапласа — этого не требует. В дальнейшем мы рассмотрим только первый из этих способов.

Решая уравнение (23) относительно y', а (24) относительно y, получим

$$y' = \varphi(x, y) \tag{25}$$

и

$$y = f(x, C). \tag{26}$$

Так как выражение (26) есть общий интеграл уравнения (25), то после подстановки значения y из (26) в уравнение (25) будем иметь тождество

$$\frac{df(x, C)}{dx} = \varphi[x, f(x, C)]. \tag{27}$$

Посмотрим, не может ли выражение (26) удовлетворить уравнению (25), если рассматривать C как функцию от x и если это возможно, то какова должна быть эта функция. Считая C зависящим от x, подставим y из (26) в (25); тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, C) + \frac{\partial f(x, C)}{\partial C} \cdot \frac{dC}{dx} = \varphi[x, f(x, C)].$$

Но из тождества (27) следует, что $\frac{\partial}{\partial x} f(x, C) = \varphi[x, f(x, C)]$, а потому $\frac{\partial f(x, C)}{\partial C} \cdot \frac{dC}{dx} = 0$, т. е. либо $\frac{dC}{dx} = 0$, либо $\frac{\partial}{\partial C} f(x, C) = 0$. Первое из этих предположений приводит к тому, что C есть постоянное и, следовательно, выражение $y = f(x, C)$ представляет собой общий интеграл. На основании же второго предположения заключаем: если выражение $y = f(x, C)$ удовлетворяет уравнению (25) в предположении, что C есть функция от x, т. е. если оно представляет собой особое решение, то C должно быть определено из равенства

$$\frac{\partial}{\partial C} f(x, C) = 0.$$

Таким образом **особое решение мы можем получить, исключая параметр C из равенств**

$$y = f(x, C) \quad \text{и} \quad \frac{\partial y}{\partial C} = 0.$$

Мы предположили, что уравнение (24) решено относительно y. Если оно решено быть не может, то, диференцируя его по переменной C, получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dC} = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{dy}{dC} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial C}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}},$$

и условие $\frac{\partial y}{\partial C} = 0$ приводит к двум:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \infty.$$

В этом случае особое решение может быть получено исключением параметра C в каждой из двух систем:

$$1) \quad \Phi(x, y, C) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$$

и

$$2) \quad \Phi(x, y, C) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \infty.$$

Надо заметить, однако, что в числе полученных решений могут заключаться не только особые, но и частные решения, а иногда даже и такие выражения, которые данному диференциальному уравнению

вовсе не удовлетворяют. Поэтому **необходима поверка полученных выражений подстановкой; если окажется, что испытуемое выражение уравнению (23) не удовлетворяет, то его откидываем, если же удовлетворяет, то для решения вопроса о том, есть ли оно особое решение или частное, надо еще его подставить в уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, являющееся общим интегралом, и посмотреть, удовлетворяется ли это уравнение постоянным значением C или нет. В первом случае имеем дело с частным, а во втором — с особым решением.**

В § 5 нами указывалось, что геометрической интерпретацией особого решения является огибающая семейства интегральных кривых. Из изложенного выше видно, что способ получения особого интеграла с помощью общего решения таков же, как и способ получения уравнения огибающей по данному уравнению семейства огибаемых кривых. В последнем случае, так же как и при отыскании особого решения, исключаем параметр C семейства из уравнений $y = f(x, C)$ и $\frac{\partial}{\partial C} f(x, C) = 0$. Отсюда следует, что особое решение геометрически представляется огибающей семейства интегральных кривых.

Пример. Если предложено найти особое решение уравнения

$$y^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] - ay\frac{dy}{dx} - ax = 0,$$

общий интеграл которого есть

$$\Phi(x, y, C) \equiv (x-C)^2 + y^2 - aC = 0,$$

где C — постоянная интегрирования, то составляем уравнение[1])

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} \equiv -2(x-C) - a = 0$$

и исключаем C из полученной системы двух уравнений. Из $\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$ находим $C = x + \frac{a}{2}$. Внося это значение C в выражение общего интеграла, получаем уравнение

$$y^2 - ax - \frac{a^2}{4} = 0,$$

являющееся искомым особым интегралом данного уравнения.

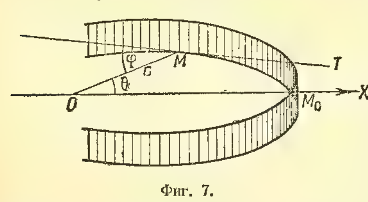
В этом примере общий интеграл геометрически изображается семейством окружностей переменного радиуса, имеющих центры на оси x-ов, а особое решение дает огибающую этого семейства — параболу.

14. Уравнение кривой, равноосвещенной источником света. Предположим, что цилиндрическая поверхность весьма малой высоты освещается источником света O (фиг. 7), расположенным в плоскости, перпендикулярной к образующим цилиндра. Обозначим F_0 степень освещения поверхности, удаленной от источника на расстояние, равное

---

[1]) Второе возможное уравнение $\frac{\partial \Phi}{\partial y} \equiv 2y = \infty$ вообще не дает интеграла данного уравнения.

единице, при условии, что лучи света нормальны к поверхности. В таком случае степень освещения элементарной площадки M будет



Фиг. 7.

$$F = F_0 \frac{\sin\varphi}{r^2},$$

где r — расстояние площадки от источника O, а φ — угол между радиусом-вектором r и касательной T в точке M к направляющей цилиндра. Найдем форму этой направляющей для случая, когда степень освещения всех точек поверхности цилиндра одна и та же и равна k. Поместим в точке O полюс полярной системы координат и обозначим буквой θ угол между осью OX и радиусом-вектором r. Согласно условию имеем

$$F_0 \frac{\sin\varphi}{r^2} = k,$$

но известно, что [1]) $\sin\varphi = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}$. Следовательно,

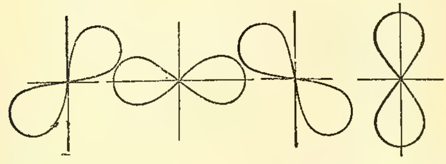
$$\frac{F_0}{r\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}} = k,$$

откуда

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sqrt{F_0^2 - k^2 r^4}}{kr} \quad \text{или} \quad \frac{d\,\frac{kr^2}{F_0}}{\sqrt{1 - \frac{k^2 r^4}{F_0^2}}} = 2d\theta.$$

Интегрируя, находим

$$\arcsin\frac{kr^2}{F_0} = 2\theta + C \quad \text{или} \quad r^2 = \frac{F_0}{k}\sin(2\theta + C).$$

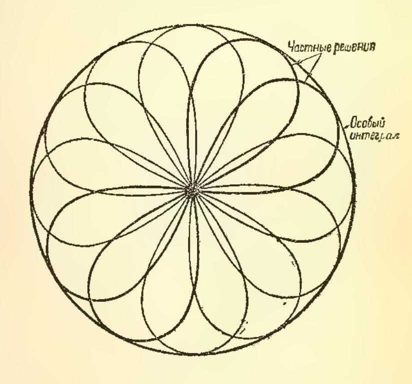


$r^2 = \frac{F_0}{k}\sin 2\theta \qquad r^2 = \frac{F_0}{k}\cos 2\theta \qquad r^2 = -\frac{F_0}{k}\sin 2\theta \qquad r^2 = -\frac{F_0}{k}\cos 2\theta$

Фиг. 8.

[1]) Это следует из известной формулы $\operatorname{tg}\varphi = r : \left(\frac{dr}{d\theta}\right)$, где φ — угол между радиусом-вектором и касательной к кривой.

Интегральные кривые суть лемнискаты. На фиг. 8 показаны кривые, соответствующие значениям C, равным 0, $\frac{\pi}{2}$, π и $\frac{3\pi}{2}$. Кроме общего интеграла это диференциальное уравнение имеет особое решение. Его мы получим, исключая параметр C из системы $\frac{kr^2}{F_0} - \sin(2\theta + C) = 0$ и $-\cos(2\theta + C) = 0$. Так как $\cos(2\theta + C) = 0$, то $\sin(2\theta + C) = 1$ и, следовательно, $r^2 = \frac{F_0}{k}$. Последнее равенство представляет особое решение и геометрически выражается окружностью радиуса $\sqrt{\frac{F_0}{k}}$. Эта окружность огибает семейство лемнискат, представляемых общим интегралом (фиг. 9).



Фиг. 9.

ГЛАВА II.

ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

§ 15. Диференциальные уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$. Переписав уравнение $y^{(n)} = f(x)$ в виде $d[y^{(n-1)}] = f(x)\,dx$ и интегрируя его, получим

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1 = \omega_1(x) + C_1.$$

Таким же образом будем иметь и далее:

$$y^{(n-2)} = \int \omega_1(x)\,dx + C_1x + C_2 = \omega_2(x) + C_1x + C_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int \omega_2(x)\,dx + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 = \omega_3(x) + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3,$$

. . . .

$$y = \omega_n(x) + \frac{C_1x^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)} + \frac{C_2x^{n-2}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-2)} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

где

$$\omega_1(x) = \int f(x)\,dx, \quad \omega_2(x) = \int \omega_1(x)\,dx, \ \ldots$$

Последнее выражение для y представляет собой общий интеграл уравнения $y^{(n)} = f(x)$.

15. Диференциальное уравнение упругой линии. К числу уравнений рассмотренного вида относится известное в сопротивлении материалов приближенное **уравнение упругой линии** (**эластической кривой**).

Если брус изгибается внешними силами и мы обозначим через E — модуль Юнга материала, из которого он сделан, через I — момент инерции поперечного сечения бруса относительно его нейтральной оси, через ρ — радиус кривизны изогнутой оси бруса (упругой линии) в точке, через которую проходит взятое сечение, и через M — изгибающий момент внешних сил, расположенных справа (или слева) от взятого сечения, то, как известно,

$$\frac{EI}{\rho} = M.$$

Принимая во внимание, что $\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$ и полагая $M = f(x)$, где буквой x обозначено расстояние сечения от начала координат, мы получаем диференциальное уравнение упругой линии

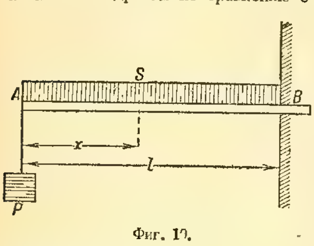
$$\frac{EIy''}{(1+y'^2)^{3/2}} = f(x).$$

Еще Яков Бернулли занимался этой кривой и ему она обязана своим названием.

В тех случаях, когда прогиб бруса незначителен, тангенс угла наклона касательной к упругой линии с осью x-ов (т. е. y') весьма мал и его квадратом по сравнению с единицей можно пренебречь; мы можем написать приближенное, но вполне пригодное для практических целей, уравнение

$$EIy'' = f(x),$$

представляющее частный случай рассмотренного в начале параграфа вида уравнений.



Фиг. 10.

Решим следующую задачу. Брус длиной l, одним концом заделанный в стену, изгибается: силой P, приложенной к другому концу A (фиг. 10), и равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q *кг/м*. Найдем уравнение его изогнутой оси и прогиб.

Изгибающий момент в некотором сечении S: от силы P равен Px, от сплошной нагрузки равен $\frac{1}{2}qx^2$. Общий изгибающий момент

$$M = Px + \frac{1}{2}qx^2.$$

Вследствие этого диференциальное уравнение упругой линии будет

$$EIy'' = -Px - \frac{1}{2}qx^2,$$

где момент взят со знаком минус потому, что как сила P, так и нагрузка qx делает в сечении S изгиб, обращенный выпуклостью вверх. Двукратное интегрирование дает

$$EIy' = -\frac{Px^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + C \quad \text{и} \quad EIy = -\frac{Px^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + Cx + C_1.$$

Произвольные постоянные C и C_1 определятся из условия, что в заделанном конце, т. е. при $x = l$, и ордината y и производная y' равны нулю (так как в точке B касательная к упругой линии совпадает с осью OX); это дает два уравнения:

$$0 = -\frac{Pl^2}{2} - \frac{ql^3}{6} + C \quad \text{и} \quad 0 = -\frac{Pl^3}{6} - \frac{ql^4}{24} + Cl + C_1,$$

из которых

$$C = \frac{Pl^2}{2} + \frac{ql^3}{6} \quad \text{и} \quad C_1 = -\frac{Pl^3}{3} - \frac{ql^4}{8}.$$

Уравнение изогнутой оси теперь будет

$$y = -\frac{Px^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + \left(\frac{Pl^2}{2} + \frac{ql^3}{6}\right)x - \frac{Pl^3}{3} - \frac{ql^4}{8}.$$

Если в нем положим $x = 0$, то получим прогиб в точке A:

$$f = -\frac{Pl^3}{3} - \frac{ql^4}{8}.$$

§ 16. Гиперболические функции. В приложениях показательные функции часто встречаются в комбинациях

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Вследствие этого эти комбинации получили особые названия. Первую называют *гиперболическим косинусом*, обозначая его через $\operatorname{ch} x$ ($\cos\operatorname{hyp} x$), а вторую — *гиперболическим синусом*, обозначая его через $\operatorname{sh} x$ ($\sin\operatorname{hyp} x$). Таким образом имеем

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Эти обозначения и названия введены по аналогии с известными формулами Эйлера для тригонометрических функций

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}.$$

Исходя из равенств, определяющих $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$, можно развить теорию гиперболических функций. Формулы ее весьма схожи с формулами обыкновенной тригонометрии. Нетрудно проверить, что

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x; \quad \operatorname{ch} xi = \cos x, \quad \operatorname{sh} xi = i \sin x;$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

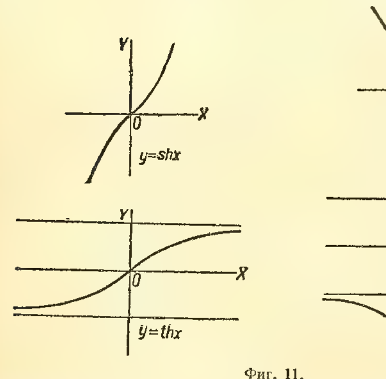
Рассматривают также гиперболические тангенс и котангенс, определяя их с помощью равенств

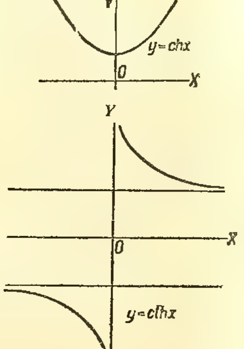
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad \text{и} \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Графики функций $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$ представлены на фиг. 11. Теорема сложения для гиперболических функций имеет вид

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \cdot \operatorname{ch} x.$$





Фиг. 11.

Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x;$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{th} x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

и

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cth} x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

В приложениях приходится рассматривать и обратные гиперболические функции. Если положим $\operatorname{ch} x = u$ и $\operatorname{sh} x = v$, то $x = \operatorname{Arch} u = \operatorname{Arsh} v$ [1]). Из этих двух функций первая двузначна, а вторая однозначна. Решая уравнения $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = u$ и $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = v$ относительно e^x, находим

$$e^x = u \pm \sqrt{u^2 - 1} \text{ и } e^x = v \pm \sqrt{v^2 + 1},$$

откуда

$$x = \ln(u \pm \sqrt{u^2 - 1}) \quad \text{и} \quad x = \ln(v + \sqrt{v^2 + 1}).$$

Следовательно,

$$\operatorname{Arch} u = \ln(u \pm \sqrt{u^2 - 1}) \quad \text{и} \quad \operatorname{Arsh} v = \ln(v + \sqrt{v^2 + 1}).$$

[1]) Знак Ar происходит от слова „area“ — площадь.

В первой из этих двух формул допустимы перед корнем оба знака. Во второй — только один, ибо при отрицательном знаке логарифм перестает быть вещественным.

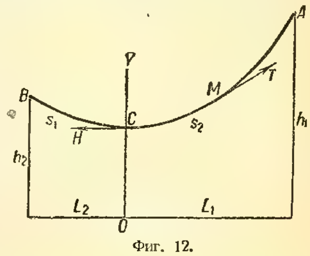
16. Уравнение цепной линии. Если из четырех величин

$$x\ y,\ y'\quad \text{и}\quad y''$$

в состав диференциального уравнения второго порядка входят только две, то оно может иметь один из следующих видов:

$$f(x,\ y'')=0,\quad f(y,\ y'')=0\quad \text{и}\quad f(y',\ y'')=0.$$

Мы сейчас рассмотрим диференциальное уравнение цепной линии, представляющее частный случай последнего вида. Задачу о цепной линии можно формулировать так.



Фиг. 12.

Тяжелая гибкая нить постоянного поперечного сечения прикреплена в точках A и B. Определить кривую провисания нити (фиг. 12). Обозначим: натяжение нити в нижней ее точке C буквой H, а в какой-либо точке M—буквой T; вес единицы длины нити — через q. Ось OY направим вверх по вертикали, проходящей через C; начало O выберем на расстоянии $\frac{H}{q}=a$ ниже точки C. При таком выборе осей координат уравнения равновесия части $CM=s$ нити будут иметь вид

$$-H+T\cos\alpha=0,\qquad T\sin\alpha=qs,$$

где $\alpha=\widehat{T,x}$.

Из этих уравнений имеем $\operatorname{tg}\alpha=y'=\frac{qs}{H}$. Диференцируя это равенство, получим

$$y''=\frac{q\sqrt{1+y'^2}}{H};$$

здесь принято во внимание, что

$$s'=\sqrt{1+y'^2}.$$

Переписав полученное уравнение в виде $\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{q}{H}dx=\frac{dx}{a}$ и затем интегрируя его, найдем

$$\ln(y'+\sqrt{1+y'^2})=\frac{x}{a}+\ln C,$$

или

$$y'+\sqrt{1+y'^2}=Ce^{\frac{x}{a}}.$$

Но $y'=0$ при $x=0$. Это значит, что $C=1$, т. е. $y'+\sqrt{1+y'^2}=$ $=e^{\frac{x}{a}}$. Далее находим $2y'=e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}$, а отсюда $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+$ $+e^{-\frac{x}{a}})+C_1$. Но так как $y=a$ при $x=0$, то $C_1=0$ и

$$y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}. \qquad (a)$$

Это и есть уравнение кривой провисания нити (цепной линии).

Если прогиб нити незначителен, то можно принять приближенно, что длина $CM=s=x$. В таком случае

$$y'=\frac{qx}{H} \quad \text{и} \quad y=\frac{x^2}{a}+a,$$

т. е. получаем параболу.

Еще Галилей принимал кривую провисания нити за параболу. И только Гюйгенсу удалось распознать ее истинную форму.

В состав уравнения (a) входит коэфициент $a=\frac{H}{q}$. Коэфициент этот неизвестен ввиду того, что величина H неизвестна. Рассмотрим способ его определения для случая, когда известны: длина нити $s_1+s_2=2\sigma$, длина пролета $L_1+L_2=2L$, разность ординат $h_1-h_2=$ $=2h$.

Из соотношения $\operatorname{tg}\alpha=\frac{qs}{H}$ имеем $s=\frac{H}{q}\operatorname{tg}\alpha$, т. е. $s=a\frac{dy}{dx}=$ $=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})$ или $s=a\operatorname{sh}\frac{x}{a}$. Ввиду этого

$$s_1=a\operatorname{sh}\frac{L_1}{a} \quad \text{и} \quad s_2=a\operatorname{sh}\frac{L_2}{a},$$

и

$$2\sigma=a\left(\operatorname{sh}\frac{L_1}{a}+\operatorname{sh}\frac{L_2}{a}\right). \qquad (b)$$

Из уравнения цепной линии (a) имеем:

$$h_1=a\operatorname{ch}\frac{L_1}{a}, \quad h_2=a\operatorname{ch}\frac{L_2}{a}$$

и

$$2h=a\left(\operatorname{ch}\frac{L_1}{a}-\operatorname{ch}\frac{L_2}{a}\right). \qquad (c)$$

Возводя равенства (b) и (c) в квадрат и затем вычитая, находим

$$2(\sigma^2-h^2)=a^2\left[\operatorname{ch}\frac{L_1}{a}\cdot\operatorname{ch}\frac{L_2}{a}+\operatorname{sh}\frac{L_1}{a}\cdot\operatorname{sh}\frac{L_2}{a}-1\right].$$

Если примем во внимание, что

$$\operatorname{ch}u\cdot\operatorname{ch}v+\operatorname{sh}u\cdot\operatorname{sh}v=\operatorname{ch}(u+v) \quad \text{и} \quad \operatorname{ch}2u=1+2\operatorname{sh}^2u,$$

то будем иметь

$$2(\sigma^2-h^2)=a^2\left(\operatorname{ch}\frac{2L}{a}-1\right)=2a^2\operatorname{sh}^2\frac{L}{a},$$

откуда

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{L}{a}}{\frac{L}{a}}=\frac{\sqrt{c^2-h^2}}{L}.$$

Это трансцендентное относительно a уравнение может быть решено при помощи таблиц гиперболических функций. Его можно также решить графически, найдя точку пересечения, отличную от начала координат, кривой

$$y=\operatorname{sh}x$$

и прямой

$$y=\frac{\sqrt{c^2-h^2}}{L}x.$$

Абсцисса точки пересечения даст величину $\frac{L}{a}$.

Если, например, $2c=120$ *м*, $2L=80$ *м*, $2h=10$ *м*, то

$$\frac{\sqrt{c^2-h^2}}{L}=\frac{\sqrt{3600-25}}{40}=1{,}49$$

и

$$\frac{a}{L}\cdot\operatorname{sh}\frac{L}{a}=1{,}49,\quad\text{или}\quad\frac{\operatorname{sh}x}{x}=1{,}49,$$

где $x=\frac{L}{a}$.

Пользуясь таблицами гиперболических функций, подбираем такой аргумент x и такой $\operatorname{sh}x$, отношение которых было бы равно 1,49. Находим, что если $x=1{,}61$, то $\operatorname{sh}x=2{,}401$ и $\frac{\operatorname{sh}x}{x}=1{,}49$. Таким образом $x=\frac{L}{a}=1{,}61$, $a=\frac{L}{1{,}61}=24{,}2$. Если примем $q=10$ *кг*, то $H=aq=242$ *кг*.

17. Уравнение висящей гибкой нити равного сопротивления. Отыскивая уравнение цепной линии, мы предполагали, что поперечные размеры нити (провода) повсюду одни и те же. Допустим теперь, что площадь поперечного сечения нити в разных ее местах изменяется пропорционально натяжению. В этом случае, очевидно, напряжения в различных сечениях нити по величине будут одинаковы и она называется нитью равного сопротивления.

Обозначим буквой ρ плотность, а через F — переменную площадь поперечного сечения нити. Тогда уравнения равновесия представятся в виде

$$-H+T\cos\alpha=0\quad\text{и}\quad T\sin\alpha-\int_0^s\rho F ds=0,$$

где H, T и α имеют те же значения, что и раньше. Теперь будем иметь

$$Hy'=\int_0^s\rho F ds,\quad\text{причем}\quad y'=\operatorname{tg}\alpha.$$

И, далее,

$$Hy''dx=\rho F ds.$$

Одинаковое для всех сечений напряжение обозначим буквой R. Мы получим

$$H = F_0 R \quad \text{и} \quad T = FR,$$

где F_0 обозначает площадь того поперечного сечения, центр тяжести которого по сравнению с центрами тяжести прочих сечений занимает самое низкое положение. В этой точке поместим начало координат. Теперь мы сможем написать граничные условия: при $x=0$ имеем $y=0$ и $\operatorname{tg}\alpha = y' = 0$.

Далее получим $T = FR = \dfrac{H}{\cos\alpha} = \dfrac{Hds}{dx}$; следовательно,

$$F = \frac{Hds}{Rdx} \quad \text{и} \quad y'' = \frac{\rho}{R}\left(\frac{ds}{dx}\right)^2.$$

Но так как $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$, то

$$y'' = \frac{1}{a}(1+y'^2), \tag{28}$$

где $a = \dfrac{R}{\rho}$. Таким образом задача опять приводится к уравнению вида

$$f(y'', y') = 0.$$

Переписав (28) в форме $\dfrac{dy'}{1+y'^2} = \dfrac{dx}{a}$, найдем

$$\operatorname{arctg} y' = \frac{x}{a} + C.$$

Но в силу второго из граничных условий $C=0$. Значит

$$y' = \operatorname{tg}\frac{x}{a}.$$

Отсюда

$$y = -a \ln\cos\frac{x}{a},$$

ибо новая произвольная постоянная тоже равна нулю на основании первого граничного условия. Уравнение цепной линии равного сопротивления можно записать в виде

$$e^{\frac{y}{a}} \cos\frac{x}{a} = 1. \tag{29}$$

Оно найдено Кориолисом и опубликовано им в первом томе журнала Лиувилля („Journal de mathématiques pures et appliquées").

Фиг. 13.

Кривая, изображающая уравнение (29), состоит из бесчисленного множества равных ветвей, расположенных в интервалах

$$\left[(4n-1)\frac{\pi a}{2},\ (4n+1)\frac{\pi a}{2}\right];$$

эти ветви отделены друг от друга интервалами

$$\left[(4n+1)\frac{\pi a}{2},\ (4n+3)\frac{\pi a}{2}\right],$$

где n — целое число.

Одна из ветвей, заключенная в интервале $\left(-\frac{\pi a}{2},\ \frac{\pi a}{2}\right)$, представлена на фиг. 13. Прямые

$$x=-\frac{\pi a}{2}\quad \text{и}\quad x=\frac{\pi a}{2}$$

служат для нее асимптотами.

§ 17. Линейные диференциальные уравнения высших порядков. Уравнение вида

$$y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+P_2y^{(n-2)}+\ldots+P_{n-1}y'+P_ny=Q, \qquad (30)$$

коэфициенты $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ и Q которого суть функции только от аргумента x, называется неоднородным линейным диференциальным уравнением n-го порядка.

Уравнение

$$z^{(n)}+P_1z^{(n-1)}+P_2z^{(n-2)}+\ldots+P_{n-1}z'+P_nz=0, \qquad (31)$$

коэфициенты P_i которого те же, что и (30), а $Q=0$, называется однородным уравнением n-го порядка, соответствующим уравнению (30).

Уравнения (30) и (31) представляют частные случаи уравнения вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0, \qquad (32)$$

когда функция y и ее производные настолько малы, что высшими их степенями по сравнению с первой можно пренебречь. В этом случае уравнение (32) переходит в (30) или (31). Интегрирование уравнений (30) и (31) основано на нескольких положениях, которые мы приводим.

1. Если известно какое-либо частное решение y_0 уравнения (30), то нахождение его общего интеграла сводится к нахождению общего интеграла уравнения (31).

Действительно, полагая в (30) $y=z+y_0$, где z есть новая неизвестная функция, находим

$$z^{(n)}+P_1z^{(n-1)}+\ldots+P_nz+y_0^{(n)}+P_1y_0^{(n-1)}+\ldots+P_ny_0=Q.$$

Но так как по условию $y_0^{(n)}+P_1y_0^{(n-1)}+\ldots+P_ny_0=Q$, то имеем

$$z^{(n)}+P_1z^{(n-1)}+\ldots+P_nz=0.$$

Таким образом нахождение функции y свелось к нахождению функции z из уравнения (31).

2. Если $z_1, z_2, \ldots, z_k$ суть частные решения уравнения (31), то и

$$z=C_1z_1+C_2z_2+\ldots+C_kz_k, \qquad (33)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_k$ — произвольные постоянные, будет его решением.

По условию имеем тождества:

$$\left.\begin{array}{l} z_1^{(n)}+P_1 z_1^{(n-1)}+\ldots+P_n z_1=0, \\ z_2^{(n)}+P_1 z_2^{(n-1)}+\ldots+P_n z_2=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_k^{(n)}+P_1 z_k^{(n-1)}+\ldots+P_n z_k=0. \end{array}\right\} \qquad (34)$$

Заменим в уравнении (31) z его выражением (33). Получим

$$C_1(z_1^{(n)}+P_1 z_1^{(n-1)}+\ldots+P_n z_1)+\ldots+C_k(z_k^{(n)}+P_1 z_k^{(n-1)}+ \\ +\ldots+P_n z_k)=0$$

тождественно. А это и значит, что (33) есть решение (31).

3. Функции $z_1, z_2, \ldots, z_k$ назовем линейно-независимыми в том случае, когда между ними не существует линейной зависимости вида

$$a_1 z_1+a_2 z_2+\ldots+a_k z_k=0,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ суть какие-либо постоянные коэфициенты, не равные одновременно нулю.

Если известно n линейно-независимых решений

$$z_1, z_2, \ldots, z_n$$

уравнения (31), то его общий интеграл есть

$$z=C_1 z_1+C_2 z_2+\ldots+C_n z_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Рассматриваемое выражение z, будучи согласно предыдущему решением уравнения (31), является в то же время его общим интегралом, так как содержит n произвольных постоянных [1]).

§ 18. Однородные линейные диференциальные уравнения с постоянными коэфициентами. Рассмотрим уравнение

$$z^{(n)}+A_1 z^{(n-1)}+A_2 z^{(n-2)}+\ldots+A_{n-1} z'+A_n z=0 \qquad (35)$$

с постоянными коэфициентами, и будем искать его частные решения в виде

$$z=e^{rx},$$

где r — не зависящий от x параметр. Образуя производные

$$z'=re^{rx}, \quad z''=r^2e^{rx}, \quad \ldots, \quad z^{(n)}=r^ne^{rx}$$

и подставляя их значения и значение z в уравнение (35), мы после сокращения на e^{rx} получим алгебраическое уравнение

$$r^n+A_1 r^{n-1}+A_2 r^{n-2}+\ldots+A_{n-1} r+A_n=0, \qquad (36)$$

называемое характеристическим. Могут быть три случая.

---

[1]) Строгое доказательство этого предложения см., например, Гурса, Курс математического анализа, т. II, ч. II.

1. Корни характеристического уравнения вещественны и различны. Если эти корни суть числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$, то мы имеем n частных решений: $e^{r_1x}, e^{r_2x}, \ldots, e^{r_nx}$, и общий интеграл будет

$$z = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \ldots + C_ne^{r_nx}. \tag{37}$$

2. Среди вещественных корней уравнения (36) есть равные между собой. Если, например, $r_1 = r_2 = \ldots = r_k$, то выражение (37) принимает вид

$$z = Ae^{r_1x} + C_{k+1}e^{r_{k+1}x} + C_{k+2}e^{r_{k+2}x} + \ldots + C_ne^{r_nx},$$

где $A = C_1 + C_2 + \ldots + C_k$. Это выражение содержит не n, а только $n - k + 1$ произвольных постоянных, а потому перестает быть общим интегралом. Исследуя этот случай, положим для краткости

$$z^{(n)} + A_1z^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}z' + A_nz = F(z). \tag{38}$$

Тогда

$$F(e^{rx}) = (r^n + A_1r^{n-1} + \ldots + A_{n-1}r + A_n)\,e^{rx}$$

или

$$F(e^{rx}) = e^{rx}\Phi(r), \quad \text{где } \Phi(r) = r^n + A_1r^{n-1} + \ldots + A_{n-1}r + A_nr.$$

Диференцируя по параметру r, мы получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial r}F(e^{rx}) = e^{rx}\,[x\Phi(r) + \Phi'(r)],\\
&\frac{\partial^2}{\partial r^2}F(e^{rx}) = e^{rx}\,[x^2\Phi(r) + 2x\Phi'(r) + \Phi''(r)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial^k}{\partial r^k}F(e^{rx}) = e^{rx}\,[x^k\Phi(r) + kx^{k-1}\Phi'(r) + \ldots + \Phi^{(k)}(r)].
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Составим теперь k-ую производную от (38) по переменной r; будем иметь

$$\frac{\partial^kF(z)}{\partial r^k} = \frac{\partial^k[z^{(n)}]}{\partial r^k} + A_1\frac{\partial^k[z^{(n-1)}]}{\partial r^k} + \ldots + A_n\frac{\partial^kz}{\partial r^k}.$$

Если в правой части этого равенства изменить порядок диференцирования, то оно принимает вид

$$\frac{\partial^kF(z)}{\partial r^k} = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial^kz}{\partial r^k}\right) + A_1\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\frac{\partial^kz}{\partial r^k}\right) + \ldots + A_n\frac{\partial^kz}{\partial r^k},$$

т. е.

$$\frac{\partial^kF(z)}{\partial r^k} = F\left(\frac{\partial^kz}{\partial r^k}\right),$$

и поэтому

$$\frac{\partial^kF(e^{rx})}{\partial r^k} = F(x^ke^{rx}).$$

Если теперь значку k давать последовательно значения 1, 2, 3, ..., k, то равенства (39) можно переписать так:

$$\left.\begin{aligned}
&F(xe^{rx}) = e^{rx}\,[x\Phi(r) + \Phi'(r)],\\
&F(x^2e^{rx}) = e^{rx}\,[x^2\Phi(r) + 2x\Phi'(r) + \Phi''(r)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&F(x^ke^{rx}) = e^{rx}\,[x^k\Phi(r) + kx^{k-1}\Phi'(r) + \ldots + \Phi^{(k)}(r)].
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Если же число r есть корень характеристического уравнения кратности $k+1$, то

$$\Phi(r)=0, \quad \Phi'(r)=0, \quad \Phi''(r)=0, \quad \ldots \quad \text{и} \quad \Phi^{(k)}(r)=0.$$

Вследствие этого правые части равенств (40) обращаются в нули, откуда следует, что

$$F(xe^{rx})=0, \quad F(x^2e^{rx})=0, \quad \ldots, \quad F(x^ke^{rx})=0.$$

А это значит, что кроме решения e^{rx} существуют еще решения xe^{rx}, $x^2e^{rx}, \ldots$ и x^ke^{rx}. Вследствие этого общий интеграл напишется так:

$$z=(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_{k+1}x^k)e^{rx}+$$
$$+C_{k+2}e^{r_{k+2}x}+\ldots+C_ne^{r_nx}.$$

3. Среди корней характеристического уравнения встречаются комплексные. Если коэфициенты $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — вещественны (что мы предполагаем) и корень $r_1=\alpha+i\beta$, то, как известно, существует корень $r_2=\alpha-i\beta$. Этим двум корням соответствуют частные интегралы $e^{(\alpha+i\beta)x}$ и $e^{(\alpha-i\beta)x}$, которые, применив формулу Эйлера, можно представить в виде

$$e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x) \quad \text{и} \quad e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x).$$

Общий интеграл тогда будет

$$z=(C_1+C_2)e^{\alpha x}\cos\beta x+(C_1i-C_2i)e^{\alpha x}\sin\beta x+C_3e^{r_3x}+\ldots+C_ne^{r_nx}$$

или

$$z=\Gamma_1e^{\alpha x}\cos\beta x+\Gamma_2e^{\alpha x}\sin\beta x+C_3e^{r_3x}+\ldots+C_ne^{r_nx},$$

где $C_1+C_2=\Gamma_1$ и $C_1i-C_2i=\Gamma_2$.

Если среди корней характеристического уравнения есть двукратный комплексный корень $r_1=r_2=\alpha+\beta i$, то будет также и двукратный $r_3=r_4=\alpha-\beta i$. В этом случае общий интеграл

$$z=[(C_1+C_2x)\cos\beta x+(C_3+C_4x)\sin\beta x]e^{\alpha x}+C_5e^{r_5x}+\ldots+C_ne^{r_nx}.$$

Нетрудно найти также форму общего интеграла в случае существования комплексных корней, кратность которых превышает два.

Пример. $z''''-3z'''+6z''-12z'+8z=0$.

Характеристическое уравнение $r^4-3r^3+6r^2-12r+8=0$ дает корни: $r_1=1$, $r_2=2$, $r_3=2i$ и $r_4=-2i$. Общий интеграл

$$z=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{2ix}+C_4e^{-2ix}.$$

Но так как $e^{\pm 2ix}=\cos 2x\pm i\sin 2x$, то общий интеграл

$$z=C_1e^x+C_2e^{2x}+\Gamma_3\cos 2x+\Gamma_4\sin 2x,$$

где $\Gamma_3=C_3+C_4$, а $\Gamma_4=C_3i-C_4i$.

18. Уравнение гармонического колебательного движения. Предположим, что точка массы m двигается прямолинейно под действием силы P. Так как сила равна произведению массы m на ускорение $\frac{d^2x}{dt^2}$ (x — расстояние точки от начала координат, t — время), то имеем диференциальное уравнение

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=P$$

прямолинейного движения точки. Среди различных возможных случаев прямолинейного движения точки надлежит выделить как особо важный случай так называемое **гармоническое колебательное движение**. Такое движение совершает точка, притягиваемая к неподвижному центру силой, пропорциональной расстоянию до него.

Примем прямую, по которой движется точка, за ось OX (фиг. 14). Притягивающая сила $P = -k^2mx$, где x — расстояние точки от неподвижного центра O, а k^2 — коэфициент, численно равный величине силы притяжения единицы массы, отстоящей от центра на единицу расстояния. Подставив это в написанное выше уравнение, мы получим диференциальное уравнение движения в виде

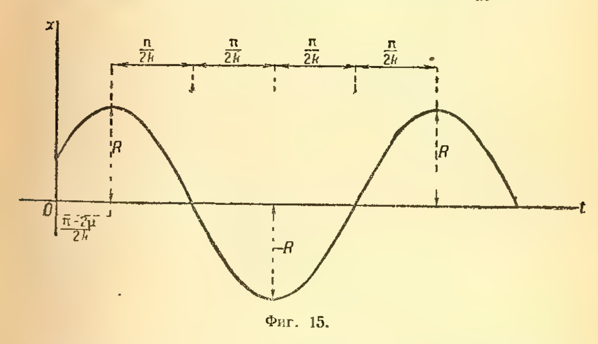
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2mx.$$

Фиг. 14.

Общий его интеграл

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{41}$$

Произвольные постоянные могут быть определены, если заданы начальные условия. Пусть в момент $t = 0$ положение точки M определялось абсциссой $x = a$, а начальная скорость была $\frac{dx}{dt} = \alpha$. Внося



Фиг. 15.

эти выражения x и $\frac{dx}{dt}$ в уравнение (41) и в уравнение $\frac{dx}{dt} = -C_1k \sin kt + C_2k \cos kt$, полученное из (41) диференцированием, мы найдем $C_1 = a$ и $C_2 = \frac{\alpha}{k}$. Тогда

$$x = a \cos kt + \frac{\alpha}{k} \sin kt.$$

Интеграл этот представляют иногда в другой форме, полагая

$$a = R \sin \mu \quad \text{и} \quad \frac{\alpha}{k} = R \cos \mu.$$

В таком случае

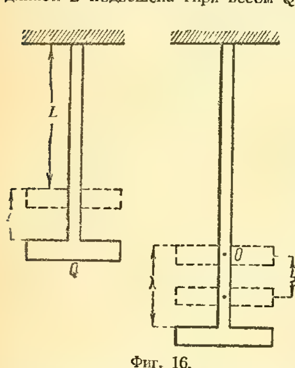
$$x = R\sin(\mu + kt), \qquad (42)$$

причем $R = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{k^2}}$ и $\operatorname{tg}\mu = \frac{ak}{a}$.

Величина R называется **амплитудой**, μ — **начальной фазой** и k — **частотой** колебания.

Заменяя в уравнении (42) t на $t + \frac{2\pi}{k}$, мы видим, что абсцисса x принимает прежнее значение. Отсюда заключаем: рассматриваемое движение есть периодическое и его период равен $\frac{2\pi}{k}$. Зависимость между абсциссой x и временем t можно изобразить графически. Откладывая значения переменной t на оси абсцисс, а значения x — на оси ординат, получим синусоиду (фиг. 15).

19. Диференциальное уравнение колебания гири, подвешенной к вертикальному стержню. Предположим, что к вертикальному стержню длиной L подвешена гиря весом Q (фиг. 16). Под влиянием веса гири стержень удлинится. Его „статическое" удлинение



Фиг. 16.

$$l = \frac{QL}{EF},$$

где E — модуль Юнга материала стержня, а F — площадь его поперечного сечения.

Дадим стержню некоторое дополнительное удлинение λ. Для этого к нему придется приложить дополнительную силу, равную

$$\frac{EF\lambda}{L}.$$

Прекратив мгновенно действие этой силы, предоставим гирю самой себе. Гиря начнет колебаться в вертикальном направлении. Чтобы написать диференциальное уравнение движения гири, рассмотрим те силы, которые приложены к ней в тот момент, когда центр ее тяжести находится на некотором расстоянии y от своего начального положения O. Эти силы таковы: 1) вес гири Q (действует сверху вниз); 2) сила упругости стержня, стремящаяся уничтожить статическое удлинение l; эта сила равна Q и действует снизу вверх; 3) сила упругости стержня, стремящаяся уничтожить удлинение y; эта сила равна $\frac{EFy}{L}$ и действует также снизу вверх.

Направим ось OY вертикально вниз. Диференциальное уравнение движения гири будет

$$\frac{Q}{g}\,\frac{d^2y}{dt^2} = Q - \left(Q + \frac{EFy}{L}\right)$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2}+k^2y=0,$$

где $k^2=\frac{EFg}{QL}$. (При этом мы не принимаем во внимание веса самого стержня.)

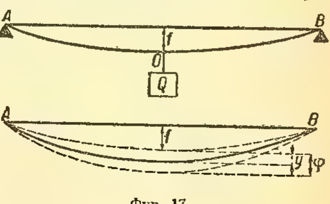
Мы видим теперь, что гиря будет совершать около точки гармоническое колебательное движение *18*. Период колебаний $T=2\pi\sqrt{\frac{QL}{EFg}}$, а амплитуда $R=\sqrt{a^2+\frac{\alpha^2}{k^2}}=\lambda$ (потому что $a=\lambda$ и $\alpha=0$); число колебаний в минуту

$$n=\frac{60}{T}=\frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{EFg}{QL}}.$$

20. Диференциальное уравнение колебаний груза, подвешенного к горизонтальному стержню. Предположим, что к середине стержня (фиг. 17), лежащего на двух опорах, подвешен груз Q. Этот груз вызовет „статический" прогиб

$$f=\frac{QL^3}{48EI},$$

где L — длина стержня, I — момент инерции поперечного сечения относительно его нейтральной оси, а E — модуль Юнга стержня.



Фиг. 17.

Дадим стержню дополнительный прогиб φ. Для этого придется к его середине приложить дополнительную силу $\frac{48EI\varphi}{L^3}$. Мгновенно отняв эту силу, предоставим стержень самому себе (не сообщая ему начальной скорости); стержень начнет колебаться. Рассмотрим силы, приложенные к середине стержня в тот момент, когда она находится на расстоянии y от своего начального положения O. Эти силы таковы:

1) груз Q, действующий сверху вниз; 2) сила упругости стержня, стремящаяся уничтожить статический прогиб f; она равна Q и направлена снизу вверх; 3) сила упругости стержня, стремящаяся уничтожить прогиб y. Эта сила равна $\frac{48EIy}{L^3}$ и направлена снизу вверх. Направляя ось OY сверху вниз, имеем диференциальное уравнение колебания

$$\frac{Q}{g}\frac{d^2y}{dt^2}=Q-\left(Q+\frac{48EIy}{L^3}\right)$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2}+k^2y=0,$$

где $k^2=\frac{48EIg}{QL^3}$.

4*

Середина стержня совершает около точки O гармонические колебания с периодом

$$T=\frac{\pi L}{2}\sqrt{\frac{QL}{3EIg}}$$

и амплитудой $R=\varphi$. Число колебаний в минуту

$$n=\frac{60}{T}=\frac{120}{\pi L}\sqrt{\frac{3EIg}{QL}}.$$

21. *Диференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Колебания скрученного вала.* Пусть точка $M(x, y)$ массы m движется в плоскости XOY под действием силы P. Обозначив проекции силы на координатные оси буквами X и Y, будем иметь два диференциальных уравнения движения точки:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X \quad \text{и} \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y.$$

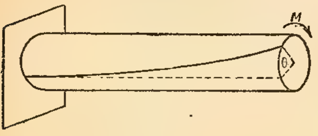
Воспользуемся ими для составления диференциального уравнения вращения тела вокруг неподвижной оси. Помножив обе части первого уравнения на y, а второго на x, вычтем из второго результата первый. Мы получим

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=xY-yX \quad \text{или} \quad m\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=xY-yX.$$

Вводя полярные координаты, будем иметь $x=\rho\cos\theta$ и $y=\rho\sin\theta$, где ρ — радиус-вектор точки M, а θ — угол, образуемый им с осью OX. Будем иметь $x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=\rho^2\frac{d\theta}{dt}$.

Следовательно, $m\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\theta}{dt}\right)=xY-yX$. Предположим теперь, что движение есть вращение точки вокруг оси, проходящей через начало координат. В таком случае радиус-вектор ρ — постоянен. Полученное уравнение перепишется так:

$$m\rho^2\frac{d^2\theta}{dt^2}=xY-yX.$$



Фиг. 18.

В случае вращения твердого тела вокруг оси нетрудно теперь получить диференциальное уравнение

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=M,$$

где I — момент инерции тела относительно оси вращения, а M — вращающий момент.

В виде приложения рассмотрим уравнение колебаний скрученного вала. Представим себе круглый вал, одним концом заделанный неподвижно (фиг. 18). Закрутим другой конец его на угол θ. Для этого придется приложить к этому концу закручивающий момент M, причем $\theta=\frac{ML}{GI_p}$, где L — длина вала, G — модуль сдвига, I_p — полярный момент инерции сечения вала.

Вслед затем крутящий момент отнимем. Вал начнет колебаться. Диференциальное уравнение его колебаний будет

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{GI_p}{L}\theta \quad \text{или} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2}+k^2\theta=0,$$

где $k^2=\frac{GI_p}{IL}$. Полученное уравнение есть уравнение гармонического колебательного движения *18.* Вал будет колебаться, и период колебаний

$$T=2\pi\sqrt{\frac{IL}{GI_p}}.$$

В тех случаях, когда период собственных колебаний вала близок к периоду создаваемых в нем колебаний, могут возникнуть, вследствие резонанса (см. стр. 68), напряжения, опасные для целости вала.

22. Диференциальное уравнение движения винта в неподвижной гайке. Предположим, что винт подвергается действию сил P_1, P_2, P_3, ..., P_n и реакции гайки. Пренебрегая силами трения по сравнению с действием внешних сил, будем полагать, что реакции гайки нормальны к поверхности винта.

Пусть r, θ и z обозначают цилиндрические координаты какой-нибудь точки Q винтовой линии. В таком случае, принимая ось винта за ось OZ, для этой точки имеем

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta \quad \text{и} \quad z=z_0+\frac{h}{2\pi}\theta.$$

Здесь z_0 есть значение z при $\theta=0$, h — высота хода винта (шаг).

Составим диференциальное уравнение движения винта в гайке, которую будем считать неподвижной. Если ω есть угловая скорость вращения винта, то проекции на координатные оси скорости точки Q будут:

$$\frac{dx}{dt}=-\omega y, \quad \frac{dy}{dt}=\omega x \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dt}=\frac{h\omega}{2\pi},$$

где t — время. Вследствие этого квадрат скорости точки Q

$$v^2=\omega^2\left(x^2+y^2+\frac{h^2}{4\pi^2}\right)=\omega^2\left(r^2+\frac{h^2}{4\pi^2}\right).$$

Можно доказать, что живая сила винта равна

$$\frac{M\omega^2}{2}\left(\rho^2+\frac{h^2}{4\pi^2}\right),$$

где M — масса винта, а ρ — его радиус инерции относительно оси вращения. Принимая во внимание, что работа сил реакций равна нулю, мы видим, что диференциальное уравнение изменения живой силы будет иметь вид

$$d\left[\frac{M\omega^2}{2}\left(\rho^2+\frac{h^2}{4\pi^2}\right)\right]=\sum(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz),$$

причем правая часть представляет сумму элементарных работ внешних сил. Воспользовавшись вышеприведенными выражениями проекций скорости точки Q, можно полученному уравнению придать вид

$$M\left(\rho^2+\frac{h^2}{4\pi^2}\right)\frac{d\omega}{dt}=\sum(xY-yX)+\frac{h}{2\pi}\sum Z.$$

Это есть диференциальное уравнение движения винта в неподвижной гайке; силами трения мы пренебрегли.

Интересно отметить тот случай, когда вращение винта будет равномерным. Случай этот будет иметь место тогда, когда сумма моментов внешних сил относительно оси вращения и сумма проекций этих сил на ту же ось связаны соотношением

$$\sum (yX - xY) = \frac{h}{2\pi} \sum Z,$$

тогда

$$\omega = \text{const.}$$

23. Уравнение затухающих колебаний. Рассмотрим случай движения точки под действием силы, притягивающей точку к неподвижному центру при наличии сопротивления среды, пропорционального скорости точки. Если коэфициент пропорциональности обозначим $2hm$ $(h > 0)$, то диференциальное уравнение движения точки можно будет написать в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2mx - 2hm\frac{dx}{dt}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = 0.$$

Это линейное однородное диференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэфициентами. Характеристическое уравнение его

$$r^2 + 2hr + k^2 = 0$$

дает корни

$$r_1 = -h + \sqrt{h^2 - k^2} \quad \text{и} \quad r_2 = -h - \sqrt{h^2 - k^2}.$$

Прежде всего рассмотрим наиболее важный случай, когда корни характеристического уравнения комплексны, т. е. когда $h^2 - k^2 < 0$. Полагая $k^2 - h^2 = \omega^2$, будем иметь $r_1 = -h + \omega i$, $r_2 = -h - \omega i$, и общий интеграл $x = e^{-ht}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$. Произвольные постоянные C_1 и C_2 определятся из условия, что в момент $t = 0$ начальное положение точки определялось абсциссой $x = a$, а начальная скорость $\frac{dx}{dt} = \alpha$.

В силу первого условия $C_1 = a$. Образуя производную

$$\frac{dx}{dt} = e^{-ht}(-C_1h\cos\omega t - C_2h\sin\omega t - C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t)$$

и подчиняя ее второму условию, получим $C_2 = \frac{\alpha + ah}{\omega}$. Таким образом

$$x = e^{-ht}\left(a\cos\omega t + \frac{\alpha + ah}{\omega}\sin\omega t\right).$$

Правую часть этого равенства можно представить в иной форме, полагая

$$a = \rho\sin\mu; \quad \frac{\alpha + ah}{\omega} = \rho\cos\mu.$$

Тогда

$$x = \rho e^{-ht}\sin(\mu + \omega t), \tag{43}$$

причем $\rho = \frac{1}{\omega}\sqrt{a^2\omega^2 + (\alpha + ah)^2}$ и $\operatorname{tg}\mu = \frac{\omega a}{\alpha + ah}$.

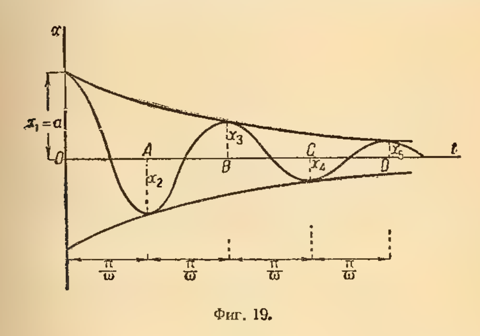
Из равенства (43) следует, что движение имеет колебательный характер. Период колебаний $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-h^2}}$. Сравнивая его с периодом $T_0=\frac{2\pi}{k}$ свободных колебаний, мы видим, что $T>T_0$. Скорость обращается в нуль периодически в моменты времени, отделенные промежутками, равными $\frac{\pi}{\omega}$, в чем можно убедиться, образуя от (43) производную и приравнивая эту производную, т. е. скорость, нулю. Для упрощения выкладок условимся время отсчитывать от одного из таких моментов. В таком случае будем иметь $x_0=a$ и $\frac{dx}{dt}=\alpha=0$ при $t=0$. Придавая времени t значения

$$t_1=0, \quad t_2=\frac{\pi}{\omega}, \quad t_3=\frac{2\pi}{\omega}, \quad t_4=\frac{3\pi}{\omega}, \ldots,$$

найдем из (43) соответствующие значения абсциссы x:

$$x_1=a, \quad x_2=-x_1e^{-\frac{h\pi}{\omega}}, \quad x_3=x_2e^{-\frac{h\pi}{\omega}}, \quad x_4=-x_3e^{-\frac{h\pi}{\omega}}, \ldots$$

Отсюда видно, что абсолютные значения абсцисс, т. е. последовательные отклонения колеблющейся точки от неподвижного центра, образуют



Фиг. 19.

бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем, равным $e^{-\frac{h\pi}{\omega}}$. Это есть случай так называемых затухающих колебаний. Закон изменения x в зависимости от времени представлен графически на фиг. 19.

Рассмотрим случай, когда $h^2-k^2>0$. Корни r_1 и r_2 характеристического уравнения будут вещественны и оба отрицательны:

$$x=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются на основании начальных условий $\left(x=a \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dt}=\alpha \quad \text{при} \quad t=0\right)$. Значения постоянных, получаемые из этих условий, таковы:

$$C_1=\frac{\alpha-ar_2}{r_1-r_2} \quad \text{и} \quad C_2=\frac{ar_1-\alpha}{r_1-r_2}.$$

Представив абсциссу x и скорость $\frac{dx}{dt}$ в виде

$$x=C_1e^{r_1t}\left[1+\frac{C_2}{C_1}e^{(r_2-r_1)t}\right]$$

и

$$\frac{dx}{dt}=v=r_1C_1e^{r_1t}\left[1+\frac{C_2\cdot r_2}{C_1\cdot r_1}e^{(r_2-r_1)t}\right],$$

мы видим, что если $\frac{C_2}{C_1}>0$, то ни абсцисса x, ни скорость v ни разу не обращаются в нуль. Это значит, что точка приближается асимптотически к притягивающему центру, находясь все время с одной от него стороны. Если $\frac{C_1}{C_2}<0$, то как x, так и v могут обратиться в нуль по одному разу.

Рассмотрим последний случай, когда $h^2-k^2=0$.

Характеристическое уравнение имеет двукратный отрицательный корень $r_1=r_2=-h$; общий интеграл будет

$$x=(C_1+C_2t)e^{-ht}.$$

Произвольные постоянные определяются из тех же условий:

$$C_1=a \quad \text{и} \quad C_2=\alpha+ah.$$

В этом случае, так же как и в предыдущем, по истечении достаточно продолжительного времени точка будет сколь угодно близка от притягивающего центра.

Колебательный разряд конденсатора, колебания магнитной стрелки гальванометра, колебания некоторых регуляторов паровых машин могут служить примерами затухающих колебаний. Движения, соответствующие случаям $h^2-k^2>0$ и $h^2-k^2=0$, имеют место при большом сопротивлении среды (например, движение магнитной стрелки при сильном успокоителе).

24. Уравнение колебательного разряда конденсатора. Представим себе, что конденсатор емкости C заряжен до потенциала V. Его заряд будет равен CV. Сила тока в цепи, куда включен конденсатор, пусть будет I. Если в течение времени dt потенциал конденсатора понизился на dV, то имеем уравнение

$$Idt=-CdV.$$

При наличии во внешней цепи самоиндукции L будем иметь для нее

$$V-L\frac{dI}{dt}=IR,$$

где R — сопротивление внешней цепи. Диференцируя последнее уравнение по времени t и заменяя затем производную $\frac{dV}{dt}$ через $-\frac{I}{C}$, по-

чучим диференциальное уравнение колебательного разряда конденсатора

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{I}{LC}=0.$$

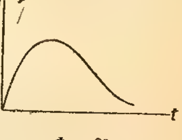
Его называют уравнением Вильяма Томсона. Если введем обозначения

$$\frac{R}{L}=2h \quad \text{и} \quad \frac{1}{LC}=k^2,$$

то найдем, что

$$\frac{d^2I}{dt^2}+2h\frac{dI}{dt}+k^2I=0.$$

Это уравнение затухающих колебаний. Выводы, сделанные выше, могут быть применены и здесь.



Фиг. 20.

Если $h^2>k^2$, т. е. $\frac{R^2}{4L}>\frac{1}{C}$, то колебаний нет: сила тока быстро растет от нуля, достигает некоторого максимума и затем постепенно исчезает (фиг. 20).

Если $h^2<k^2$, т. е. $\frac{R^2}{4L}<\frac{1}{C}$, то наступает один или несколько скачков: искра не представляет чего-нибудь цельного; при помощи быстро вращающегося зеркала она обнаруживается как периодическое явление.

25. Диференциальное уравнение продольного изгиба; прямой брус постоянного поперечного сечения. Предположим, что прямой брус постоянного поперечного сечения закреплен концом A неподвижно (фиг. 21) и подвергается действию сжимающей силы P, приложенной к другому концу O. При некотором значении силы P брус изогнется. Произойдет так называемый продольный изгиб. То значение силы P, при котором начинается искривление оси бруса, называют критическим. Поставим себе целью найти это значение.

Принимая во внимание, что изгибающий момент в каком-нибудь сечении S будет равен Py (фиг. 21), мы можем диференциальное уравнение упругой линии *15* написать в виде

$$EIy''=-Py,$$

Фиг. 21.

где знак минус удержан потому, что кривая обращена в точке S выпуклостью в сторону положительных ординат и потому производная y'' должна быть отрицательной. Предполагаем при этом, что изгиб достаточно мал для того, чтобы можно было воспользоваться приближенным уравнением упругой линии.

Полагая $\frac{P}{EI}=m^2$, мы перепишем полученное уравнение в виде

$$y''+m^2y=0.$$

Задача, таким образом, приводится к интегрированию простого диференциального уравнения второго порядка. Его характеристическое уравнение $r^2 + m^2 = 0$ имеет корни: $r_1 = mi$ и $r_2 = -mi$. Общий интеграл

$$y = A\cos mx + B\sin mx,$$

где A и B — произвольные постоянные. Для их определении имеем условия: 1) при $x = 0$ ордината $y = 0$; это дает $A = 0$; 2) при $x = l$, в силу заделки конца, касательная к изогнутой оси параллельна оси OX; это значит, что $y' = 0$. Но $y' = Bm\cos mx$; следовательно,

$$Bm\cos ml = 0.$$

Если допустим, что $B = 0$, то получим уравнение оси в виде $y = 0$, т. е. имеем прямолинейную форму равновесия. Если допустим, что $B \neq 0$, то $\cos ml = 0$, т. е. $ml = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$, где n — произвольное целое число. Принимая $ml = \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{или } l\sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{\pi}{2}\right)$, находим

$$P = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}.$$

Это равенство дает найденное еще Эйлером значение критической силы. Мы здесь не будем останавливаться ни на значениях критической силы при других способах закрепления концов, ни на пределах применимости формулы Эйлера.

Фиг. 22.

26. *Диференциальное уравнение продольного изгиба; прямой брус с утолщением в средней части.* Предположим, что брус OA (фиг. 22) с утолщением в средней части сжимается с обоих своих концов одинаковыми по величине, но противоположно направленными силами (величина каждой силы равна P). Если изгиб достаточно мал, то, выбрав точку O за начало и расположив оси так, как указано на чертеже, получим уравнение

$$EI_1 y'' = -Py \quad \text{или} \quad y'' + m_1^2 y = 0 \text{ — для участка } I$$

и

$$EI_2 y'' = -Py \quad \text{или} \quad y'' + m_2^2 y = 0 \text{ — для участка } II.$$

Здесь $m_1^2 = \frac{P}{EI_1}$ и $m_2^2 = \frac{P}{EI_2}$. Общие интегралы написанных уравнений будут:

$$y = A\cos m_1 x + B\sin m_1 x \quad \text{и} \quad y = C\cos m_2 x + D\sin m_2 x.$$

Условия для определения постоянных A, B, C и D таковы: при $x = 0$ будет $y = 0$, т. е. $A = 0$; при $x = a$ ординаты обоих участков совпадают, т. е.

$$B\sin m_1 a = C\cos m_2 a + D\sin m_2 a; \tag{44}$$

кроме того, изогнутая ось в точке B имеет в частях I и II общую касательную (производные от ординат равны), что дает:

$$Bm_1 \cos m_1 a = -Cm_2 \sin m_2 a + Dm_2 \cos m_2 a. \qquad (45)$$

При $x = a + b$, т. е. в середине стержня, касательная параллельна оси OX, откуда

$$-C \sin m_2 (a + b) + D \cos m_2 (a + b) = 0. \qquad (46)$$

Обозначим через f ординату изогнутой оси для $x = a + b$, тогда

$$C \cos m_2 (a + b) + D \sin m_2 (a + b) = f. \qquad (47)$$

Уравнения (44), (46) и (47) дают

$$C = f \cos m_2 (a + b) \quad \text{и} \quad D = f \sin m_2 (a + b).$$

Внося эти значения в уравнение (45), находям

$$\operatorname{tg} m_1 a \cdot \operatorname{tg} m_2 b = \frac{m_1}{m_2}. \qquad (48)$$

Но $\frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}$, полагая же $\sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = k$, имеем $m_1 = m_2 k$, и уравнение (48) перепишется в виде

$$\operatorname{tg} m_2 ka \cdot \operatorname{tg} m_2 b = k. \qquad (49)$$

Найдя из (49) величину m_2, определим затем критическую силу по формуле

$$P = EI_2 m_2^2 = EI_1 m_1^2.$$

Фиг. 23.

Для деревянного круглого бруса [1]) указанных на фиг. 23 размеров имеем

$$I_1 = \frac{\pi 4^4}{4} = 201 \text{ см}^4; \quad I_2 = \frac{\pi 5{,}65^4}{4} = 804 \text{ см}^4; \quad \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = 2 \text{ и } \operatorname{tg} 400 m_2 \cdot \operatorname{tg} 600 m_2 = 2.$$

Отсюда наименьший положительный корень $m_2 = 0{,}0019$. При $E = 100\,000$ кг/см² критическая сила $P = 100\,000 \cdot 804 \cdot 0{,}0019^2 = 285{,}7$ кг.

27. *Уравнение деформации бруса, лежащего на упругом основании.* Представим себе очень длинный призматический брус, лежащий на горизонтальном упругом основании (прогон на упругом настиле, железнодорожная шпала). Пусть на этот брус действует вертикальная сила P, приложенная в средней точке бруса O. Принимая эту точку за начало, направим ось OX по оси бруса, а ось OY — вертикально вверх. Изгибаемый брус предположим прикрепленным к основанию. Это значит, что отнесенное к единице длины давление p, передаваемое от бруса

---

[1]) A. Francke, Die Tragkraft der Säulen bei veränderlichen Querschnitt, „Zeit. für Math. und Phys.", B. 46.

упругому основанию, может быть как положительным, так и отрицательным. Диференциальное уравнение изогнутой оси бруса

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M.$$

В курсах сопротивления материалов доказывается, что изгибающий момент M и величина напряжения p связаны соотношением $\frac{d^2M}{dx^2}=p$. Поэтому

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=p. \qquad (50)$$

Обыкновенно предполагают, что давление в каждой точке пропорционально пониженню y этой точки, т. е. что $p=ky$, где k — коэфициент пропорциональности, определяемый опытным путем. Таким образом имеем

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=-ky,$$

причем знак минус берем потому, что положительным прогибам соответствуют направленные вниз отрицательные реакции. Если введем обозначение $\alpha=\sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$, то полученное диференциальное уравнение представится в виде

$$\frac{d^4y}{dx^4}+4\alpha^4y=0.$$

Его характеристическое уравнение

$$r^4+4\alpha^4=0$$

приводится к двум:

$$r^2-2\alpha r+2\alpha^2=0 \quad \text{и} \quad r^2+2\alpha r+2\alpha^2=0,$$

и дает корни:

$$r_1=\alpha(1+i), \quad r_2=\alpha(1-i), \quad r_3=-\alpha(1-i) \quad \text{и} \quad r_4=-\alpha(1+i).$$

Общий интеграл будет

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x)+e^{-\alpha x}(C_3\cos\alpha x+C_4\sin\alpha x).$$

При больших значениях x прогибы y должны быть весьма малы. Между тем множитель $e^{\alpha x}$ при больших значениях x становится большим числом. Отсюда заключаем, что полученное для y выражение может удовлетворить требованию задачи лишь при условии, что $C_1=C_2=0$. В таком случае

$$y=e^{-\alpha x}(C_3\cos\alpha x+C_4\sin\alpha x).$$

Постоянные C_3 и C_4 могут быть определены на основании следующих двух соображений.

1. В начале координат (при $x=0$) касательная к упругой линии горизонтальна, т. е. $y'=0$.

Но

$$y'=\alpha e^{-\alpha x}[-C_3(\cos\alpha x+\sin\alpha x)+C_4(\cos\alpha x-\sin\alpha x)],$$

что при $x=0$ дает

$$0=\alpha(-C_3+C_4), \quad \text{т. е.} \quad C_4=C_3,$$

и поэтому

$$y=C_3e^{-\alpha x}(\cos\alpha x+\sin\alpha x).$$

2. В курсах сопротивления материалов доказывается, что так называемая поперечная (перерезывающая) сила, представляющая сумму сил, действующих по одну сторону (справа или слева) от взятого сечения, равна $EI\frac{d^3y}{dx^3}$. В данном случае эта сила расположена справа от начала координат и, как это нетрудно непосредственно видеть, равна $-\frac{P}{2}$. Образуя третью производную, мы найдем, что

$$y'''=4C_3\alpha^3e^{-\alpha x}\cos\alpha x,$$

что при $x=0$ дает

$$4C_3EI\alpha^3=-\frac{P}{2},$$

т. е. $C_3=-\frac{P}{8EI\alpha^3}$,

и, таким образом,

$$y=-\frac{Pe^{-\alpha x}}{8EI\alpha^3}(\cos\alpha x+\sin\alpha x).$$

Прогиб получим, полагая здесь $x=0$. Он будет

$$f=-\frac{P}{8EI\alpha^3}.$$

Фиг. 24.

Приблизительное очертание упругой линии представлено на фиг. 24. Множитель $e^{-\alpha x}$ создает быстрое убывание высоты волн изогнутой оси бруса по мере удаления от начала координат.

28. *Диференциальное уравнение колебаний вала вследствие действия центробежных сил.* Опыт показывает, что тонкий и длинный вал при большой скорости вращения способен выпучиваться и принимать искривленную форму. То значение угловой скорости, при котором может возникнуть подобного рода явление, называют **критической** скоростью вала. Вполне понятно, что определение ее величины имеет большое практическое значение. Пусть y есть прогиб вала, соответствующий абсциссе x. На элемент длиной dx будет действовать центробежная сила $m\omega^2y\,dx$, где m — масса единицы длины вала, а ω — угловая скорость его вращения. Уподобив эту силу равномерно распределенной по длине вала нагрузке, положим $p=m\omega^2y$ и, воспользовавшись уравнением (50), получим

$$\frac{d^4y}{dx^4}=a^4y,$$

где

$$a=\sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EI}}.$$

Характеристическое уравнение $r^4-a^4=0$ дает корни:

$$r_1=a, \quad r_2=-a, \quad r_3=ai \quad \text{и} \quad r_4=-ai.$$

Общий интеграл

$$y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax. \qquad (51)$$

Постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 определяются на основании граничных условий. На закрепленных концах вала изгибающие моменты и прогибы равны нулю. Ввиду этого граничные условия таковы: при $x = 0$ имеем $y = 0$ и $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; при $x = l$ также $y = 0$ и $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, где l — длина вала.

Применяя эти условия к выражению (51), получим:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0, \quad C_1 e^{al} + C_2 e^{-al} + C_3 \cos al + C_4 \sin al = 0,$$

$$C_1 + C_2 - C_3 = 0 \text{ и } C_1 e^{al} + C_2 e^{-al} - C_3 \cos al - C_4 \sin al = 0.$$

Из двух первых уравнений находим $C_2 = -C_1$ и $C_3 = 0$. Подстановка этих значений в два последние уравнения приводит к заключению, что $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ и $C_4 \sin al = 0$; предположение $C_4 = 0$ дает $y = 0$ (тождественно), т. е. получаем прямолинейную форму равновесия. Если же положим $\sin al = 0$, то получим $al = k\pi$, где k — любое целое число. Придавая ему значения 1, 2, 3, 4, ..., будем получать a соответственно равным $\frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \frac{3\pi}{l}, \frac{4\pi}{l}, \ldots$ и соответствующие значении критической угловой скорости:

$$\frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \frac{2^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \frac{3^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}, \ldots$$

§ 19. Неоднородные линейные диференциальные уравнения с постоянными коэфициентами. Согласно сказанному в § 17 общий интеграл неоднородного линейного диференциального уравнения

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + P_2 y^{(n-2)} + \ldots + P_n y = Q \qquad (30)$$

с постоянными коэфициентами есть

$$y = z + y_0,$$

где z — общий интеграл однородного уравнения

$$z^{(n)} + P_1 z^{(n-1)} + P_2 z^{(n-2)} + \ldots + P_n z = 0, \qquad (31)$$

а y_0 — есть какое-либо частное решение уравнения (30).

Если z_1, z_2, ..., z_n суть линейно-независимые частные решения уравнения (31), то общее решение уравнения (30) будет:

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n + y_0,$$

где C_1, C_2, ..., C_n — произвольные постоянные. Прием нахождения частных решений уравнения (31) известен. Остается сказать о способе нахождения частного решения y_0 уравнения (30). В некоторых случаях это решение может быть найдено весьма просто по способу неопределенных коэфициентов. Отметим здесь несколько из этих случаев.

1. *Последний член Q есть целый многочлен степени m.* Если коэфициент $P_n \neq 0$, то y_0 ищут в виде многочлена степени m с неопределенными коэфициентами. Если же $P_n = 0$, а $P_{n-1} \neq 0$, то y_0 следует искать в виде многочлена степени $m + 1$.

Если $P_n = 0$ и $P_{n-1} = 0$, а $P_{n-2} \neq 0$, то надо y_0 искать в виде многочлена степени $m+2$, и т. д.

2. Член Q представляет собой призведение целого многочлена степени m на $e^{\mu x}$:

$$Q = (B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m) e^{\mu x},$$

где μ — есть заданное число, не равное ни одному из корней характеристического уравнения. В этом случае y_0 следует искать в той же форме, т. е.

$$y_0 = (Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Kx + L) e^{\mu x}.$$

3. Если заданное число μ есть корень кратности k характеристического уравнения, то частное решение уравнения (30) следует искать в форме

$$y_0 = x^k (Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Kx + L) e^{\mu x}.$$

4. Если $Q = f(x) \cos \beta x$ или $Q = f(x) \sin \beta x$, где $f(x)$ есть целый многочлен степени m, а характеристическое уравнение не имеет корней $\pm \beta i$, то частное решение можно искать в форме

$$y_0 = (Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + L) \cos \beta x +$$
$$+ (A_1 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + L_1) \sin \beta x.$$

В случае же, когда характеристическое уравнение имеет корни $\pm \beta i$ кратности k, то

$$y_0 = x^k (Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + L) \cos \beta x +$$
$$+ x^k (A_1 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + L_1) \sin \beta x.$$

Пример 1. $y'' - y' - 6y = x^2 + x + 1$.

Корнями характеристического уравнения $r^2 - r - 6 = 0$ служат $r_1 = -2$ и $r_2 = 3$.

Следовательно, общий интеграл

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + y_0,$$

где y_0 — есть частное решение. Ищем это решение в форме

$$y_0 = Ax^2 + Bx + C.$$

Образуя производные $y_0' = 2Ax + B$ и $y_0'' = 2A$ и подставляя их значения и значение y_0 в заданное диференциальное уравнение, получим равенство, которое должно быть тождеством:

$$-6Ax^2 - (2A + 6B)x + 2A - B - 6C = x^2 + x + 1,$$

откуда

$$-6A = 1, \quad -2A - 6B = 1 \quad \text{и} \quad 2A - B - 6C = 1.$$

Значит

$$A = -\frac{1}{6}, \quad B = -\frac{1}{9} \quad \text{и} \quad C = -\frac{11}{54}.$$

Частное решение будет

$$y_0 = -\frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{9} x - \frac{11}{54},$$

и общий интеграл

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{9} x - \frac{11}{54}.$$

Пример 2. $y'' + y = x \cos x$.

Корни характеристического уравнения: $r_1 = i$ и $r_2 = -i$, т. е. в данном случае характеристическое уравнение имеет простые корни вида $\pm \beta i$.

Поэтому частное решение будем иметь в форме

$$y_0 = (Ax + B)\,x\cos x + (Cx + D)\,x\sin x.$$

Образуем y_0' и y_0'' и подставляем выражения y_0 и y_0'' в заданное уравнение. Находим

$$(4Cx + 2A + 2D)\cos x + (2C - 2B - 4Ax)\sin x = x\cos x;$$

отсюда

$$4C = 1,\quad 2A + 2D = 0,\quad 2C - 2B = 0 \quad \text{и} \quad 4A = 0,$$

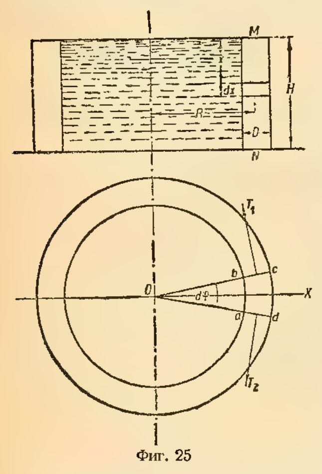
т. е.

$$A = 0,\quad B = \frac{1}{4},\quad C = \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad D = 0.$$

Общий интеграл будет

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{4}\sin x + \frac{x^2}{4}\sin x.$$

Занимаясь отысканием частного решения y_0 неоднородного уравнения по способу неопределенных коэфициентов, мы не входили в теоретические соображения о законности отыскания этого решения в той или другой форме и ограничивались лишь указанием вида этого решения. Оправданием возможности нахождения частного решения выбранного вида служит то обстоятельство, что неопределенные коэфициенты, входящие в состав y_0, определяются однозначным образом и, таким образом, самая форма частного решения оправдывается a posteriori.



Фиг. 25

29. *Дифференциальное уравнение деформации стенок цилиндрического резервуара.* Рассмотрим резервуар для хранения жидкости, имеющий форму цилиндра, толщина D стенок которого мала по сравнению со средним радиусом R (фиг. 25), а меридиональное сечение стенки — прямоугольник. На элемент стенки с основанием $abcd$ и высотой dx, взятые на глубине x, действуют:

1) сила давления жидкости, равная $\gamma x R\, d\varphi\, dx$ и приложенная к грани ab (здесь буквой γ обозначен вес единицы массы жидкости);

2) силы упругости T_1 и T_2, приложенные к граням bc и ad и, вследствие симметрии, равные между собой.

Если мы обозначим перемещения точек взятого элемента по радиальному направлению (прогиб) буквой y, то относительное удлинение их первоначального расстояния от оси цилиндра будет $y : R$. При этом надо заметить, что ввиду малости толщины стенок мы можем считать величины y для всех точек элемента равными и положить, что эти точки равноудалены от оси цилиндра.

Относительное увеличение длины окружности цилиндра на уровне взятого элемента будет также равно $y:R$. Поэтому напряжения, вызванные в стенках силами упругости, будут равны $E\frac{y}{R}$, где E — модуль Юнга материала стенки. Самые же силы упругости

$$T_1 = T_2 = \frac{Ey}{R}Ddx.$$

Равнодействующая всех сил, приложенных к элементу, будет

$$dQ = \gamma xRd\varphi dx - T_1 \sin\frac{d\varphi}{2} - T_2 \sin\frac{d\varphi}{2}$$

или, заменяя $\sin\frac{d\varphi}{2}$ через $\frac{d\varphi}{2}$,

$$dQ = \gamma xRd\varphi dx - \frac{yE}{R}Dd\varphi dx.$$

Эта сила dQ представляет собой приращение поперечной силы, соответствующее приращению dx глубины элемента. Помня, что изгибающий момент M и поперечная сила Q связаны соотношением

$$\frac{dM}{dx} = Q$$

и что $M = EI\frac{d^2y}{dx^2}$, где I есть момент инерции площади $abcd$ относительно ее нейтральной оси, мы получим

$$E\frac{d^2}{dx^2}\left(I\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \gamma xRd\varphi - \frac{yE}{R}Dd\varphi. \quad (52)$$

Но

$$I = \frac{D^3Rd\varphi}{12}.$$

После подстановки этого выражения в (52) и сокращения на $Rd\varphi$ получим

$$\frac{ED^3}{12}\cdot\frac{d^4y}{dx^4} = \gamma x - \frac{yED}{R^2},$$

или

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4\alpha^4 y = m^4 x, \quad \text{где } \alpha^4 = \frac{3}{R^2D^2} \quad \text{и} \quad m^4 = \frac{12\gamma}{ED^3}.$$

Общий интеграл полученного уравнения (§ 19) будет

$$y = C_1e^{\alpha x}\cos\alpha x + C_2e^{\alpha x}\sin\alpha x + C_3e^{-\alpha x}\cos\alpha x + C_4e^{-\alpha x}\sin\alpha x + \frac{m^4x}{4\alpha^4}.$$

Произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 могут быть определены из условий на концах вертикальной полоски MN, имеющей фигуру $abcd$ поперечным сечением.

В случае, например, когда резервуар имеет днище, которое совершенно не деформируется, то условия будут такие:

$$y = 0 \text{ и } y' = 0 \text{ при } x = 0$$

и

$$y = 0 \text{ и } y' = 0 \text{ при } x = H,$$

где H — высота цилиндра. Если принять во внимание деформацию днища, то задача усложняется.

В разобранном примере мы принимали так называемую „жесткость" равной EI. При более точных расчетах следует вводить „цилиндрическую жесткость" (см., например, Тимошенко, Курс сопротивления материалов, издание 2-е, § 143 и 154).

30. Уравнение вынужденных колебаний. Предположим, что кроме силы притяжения к неподвижному центру $-mk^2x$, пропорциональной расстоянию от него, и сопротивления среды $2mh\frac{dx}{dt}$, пропорционального скорости, к точке приложена еще периодическая сила, определяемая формулой

$$P = Em\cos pt,$$

где E, p, h и k — некоторые постоянные величины, m — масса материальной точки и x — расстояние от точки до притягивающего центра. Сила P изменяется в пределах от $+Em$ до $-Em$ и период ее полного изменения равен $\frac{2\pi}{p}$.

Диференциальное уравнение движения точки в этом случае будет

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = E\cos pt. \tag{53}$$

Это линейное уравнение второго порядка с последним членом. Корни характеристического уравнения $r^2 + 2hr + k^2 = 0$ будут

$$r_1 = -h + \sqrt{h^2 - k^2} \quad \text{и} \quad r_2 = -h - \sqrt{h^2 - k^2}.$$

Предполагая, что $h < k$, мы получим общий интеграл в виде

$$x = e^{-ht}(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) + x_0,$$

где $\omega^2 = k^2 - h^2$, а x_0 — есть частное решение уравнения (53). Это частное решение будем искать в форме

$$x_0 = A\cos pt + B\sin pt.$$

Неопределенные коэфициенты A и B определятся, если значения $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{d^2x_0}{dt^2}$ и x_0 подставим в уравнение (53) вместо $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{dx}{dt}$ и x.

Сравнивая коэфициенты при $\cos pt$ в правой и левой частях полученного тождества и приравняв нулю коэфициент при $\sin pt$, мы для определения A и B получим два уравнения:

$$A(k^2 - p^2) + 2hBp = E \quad \text{и} \quad B(k^2 - p^2) - 2hAp = 0,$$

из которых

$$A = \frac{E(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2} \quad \text{и} \quad B = \frac{2hpE}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2};$$

искомый общий интеграл будет

$$x = e^{-ht}(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) + A\cos pt + B\sin pt.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определятся, если примем во внимание начальные условия: в момент $t = 0$ абсцисса $x = a$ и скорость $\frac{dx}{dt} = \alpha$. На основании этих условий получим

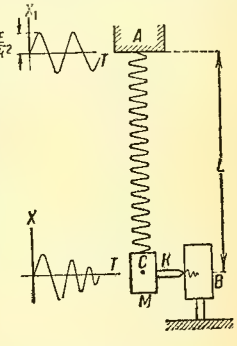
$$C_1 = a - A \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\alpha + (a - A)h - Bp}{\omega}.$$

По мере увеличения времени t множитель e^{-ht} стремится к нулю. При достаточно больших t можно практически принять, что движение совершается по закону $x = A\cos pt + B\sin pt$ и имеет своим периодом $\frac{2\pi}{p}$.

Это колебательное движение, производимое периодической силой $Em\cos pt$, называют вынужденным, противополагая ему то, которое совершалось бы при отсутствии периодической силы и которое называют свободным или собственным колебанием. Таким образом мы видим, что периодическая сила стремится сообщить движущейся точке колебания, период которых равен периоду изменения этой силы.

Иллюстрируем сказанное помощью простого примера. Представим себе груз M, подвешенный к точке A (фиг. 26) посредством пружины. Расстояние центра тяжести C этого груза от точки привеса в момент, когда груз находится в покое, пусть будет L. Выведем груз из положения равновесия и затем предоставим самому себе. Он будет колебаться. В каждый момент t расстояние x его центра тяжести C от положения, которое этот центр занимал в момент равновесия, удовлетворяет уравнению

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + 2hm\frac{dx}{dt} + k^2mx = 0, \quad (54)$$



Фиг. 26.

где m — масса тела M, $2hm$ — коэфициент сопротивления среды, k^2mx — сила упругости пружины, массой которой пренебрегаем.

Теперь представим себе, что точка привеса A в свою очередь начинает совершать колебания по закону

$$x_1 = (E : k^2)\cos pt,$$

где E и p — постоянные. В таком случае в момент t на тело M будет действовать не сила k^2mx, а $k^2m(x - x_1)$, и уравнение (54), после сокращения на m, переходит в такое:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2(x - x_1) = 0$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = E\cos pt.$$

Вынужденные колебания центра тяжести C будут совершаться по закону (см. выше):

$$x = A\cos pt + B\sin pt.$$

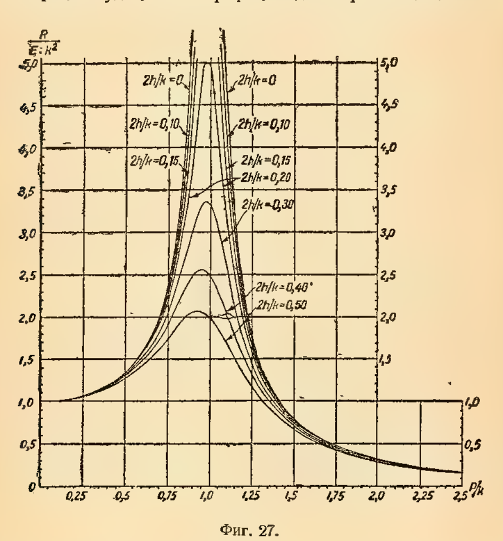
Полагая $A = R\sin\gamma$; $B = R\cos\gamma$, будем иметь

$$x = R\sin(\gamma + pt),$$

причем

$$R = \frac{E}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4h^2p^2}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{k^2-p^2}{2hp}. \qquad (55)$$

Если $|k-p| \gg 0$ и частота p периодической силы увеличивается, то амплитуда R вынужденных колебаний будет уменьшаться и может быть сделана весьма малой, как это видно из выражения (55). Этим свойством вынужденных колебаний пользуются в тех случаях, когда в колеблющейся системе желательно получить „неподвижную" точку. В этом встречается надобность при устройстве приборов для записывания вибраций судов, сейсмографов, индикаторов и т. п.



Фиг. 27.

Если, например, принять $h=0{,}1k$ и $p=10k$, то согласно (55) $R \approx \frac{1}{99}\,\frac{E}{k^2}$, т. е. амплитуда колебаний точки C будет в 99 раз меньше амплитуды колебаний точки A. Если к телу M прикрепить карандаш K, то он будет почти неподвижен. При колебании в вертикальном направлении цилиндра B, приводимого во вращение часовым механизмом и жестко связанного с точкой подвеса A, карандаш будет чертить на ленте, надетой на цилиндр, кривую, отмечающую колебания всего прибора.

31. Резонанс. Особенно важным является тот частный случай, когда силой сопротивления можно пренебречь (h — мало) и в то же время

$p \approx k$, т. е. период „возмущающей" силы равен периоду „собственных" колебаний точки.

В этом случае величина R выражается так:

$$R \approx \frac{E}{(k^2 - p^2)} \quad \text{и} \quad \lim_{k \to p} R = \infty.$$

На фиг. 27 изображена зависимость отношения амплитуды R вынужденных колебаний к амплитуде $E : k^2$ возмущающей силы от отношения $p : k$ для различных величин $(2h) : k$. Из чертежа видно, что по мере приближения отношения $p : k$ к 1 величина R увеличивается до некоторого максимума, зависящего от $\frac{2h}{k}$; при $\frac{2h}{k} \to 0$ этот максимум неограниченно возрастает. Это явление носит название резонанса.

Для случая резонанса диференциальное уравнение колебаний (при отсутствии сопротивления среды) запишется так:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p^2x = E \cos pt,$$

его общий интеграл

$$x = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + x_0,$$

где x_0 — частное решение уравнения. Отыскивая последнее в форме (см. § 19)

$$x_0 = (A \cos pt + B \sin pt)\, t,$$

мы, как и раньше, для определения коэфициентов A и B получим два уравнения, из которых найдем $A = 0$ и $B = \frac{E}{2p}$.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определятся из начальных условий:

$$x = a \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dt} = \alpha \quad \text{при} \quad t = 0;$$

они будут $C_1 = a$ и $C_2 = \frac{\alpha}{p}$.

Поэтому

$$x = a \cos pt + \frac{\alpha}{p} \sin pt + \frac{Et \sin pt}{2p}.$$

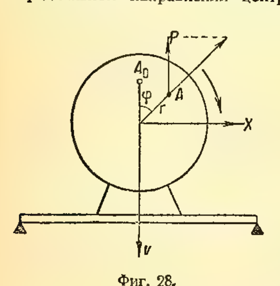
С возрастанием t член $\frac{Et}{2p} \sin pt$ может достигнуть значительной величины.

Это значит, что когда сила P такова, что ее период близок к периоду „собственных" колебаний точки, то она может сообщить точке колебания со значительной амплитудой даже в том случае, когда эта сила мала. В этом и заключается явление резонанса. Оно хорошо известно в акустике в виде вызываемых колебаниями камертонов колебаний частей музыкальных инструментов. Сюда же надо причислить и такие явления, как вибрации судов от работы машины; колебания цепных мостов при прохождении идущего в ногу отряда; колебания фундаментов, вызываемые периодическими силами, возникающими от колебания машинных частей; раскачивание тяжелых качелей человеком и т. п. В тех случаях, когда резонанс не желателен, его можно устра-

нить, увеличивая разность между частотой p периодической силы P и частотой k собственных колебаний тела.

32. Уравнение вынужденных колебаний опорной балки. Представим себе, что при вращении маховика точка A, находящаяся на расстоянии r от оси вращения, не уравновешена (фиг. 28). Обозначим постоянную угловую скорость вращения маховика буквой p. Если условимся отсчитывать время от момента нахождения точки в положении A_0 на оси OY, то угол поворота за время t будет $\varphi = pt$. Действующая в радиальном направлении центробежная сила равна mp^2r, где m — масса точки A. Проекция этой силы на ось OY

$$P = mp^2r \cos pt.$$



Фиг. 28.

Под влиянием этой силы P балка, лежащая на двух опорах и поддерживающая машину, будет совершать вынужденные колебания. Диференциальное уравнение ее движения будет отличаться от уравнения свободных колебаний балки (стр. 51) только тем, что в правой его части появится выражение периодической силы

$$\frac{Q}{g}\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{48EIy}{L^3} - mp^2r \cos pt.$$

Здесь Q обозначает вес машины; E, I, g и L имеют прежние значения. Полагая

$$\frac{48EIg}{QL^3} = k^2 \quad \text{и} \quad -\frac{mp^2rg}{Q} = T,$$

мы сможем уравнению придать вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2y = T\cos pt.$$

Если p не равно k, то общий интеграл

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + y_0,$$

где y_0 — частное решение, которое ищем в форме $y_0 = A\cos pt + B\sin pt$. Далее найдем $A = \frac{T}{k^2 - p^2}$ и $B = 0$.

Вследствие этого

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{T}{k^2 - p^2} \cos pt.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 могут быть определены, если заданы начальные условия. Если $p = k$, наступает резонанс, и явление происходит согласно найденному ранее (стр. 69) уравнению

$$y = a\cos pt + \frac{a}{p}\sin pt + \frac{Tt}{2p}\sin pt.$$

Все сказанное относительно резонанса может быть применено и к данному случаю.

33. Биения. На стр. 67 было замечено, что в случае вынужденных колебаний по мере увеличения времени t движение точки приближается к такому, которое выражается равенством

$$x = A\cos pt + B\sin pt,$$

где p есть частота периодической силы.

Полагая

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \sin\mu = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{и} \quad \cos\mu = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

мы получим

$$x = R\sin(\mu + pt).$$

Постоянные A и B определяются на основании начальных условий.

Представим себе, что вынужденные колебания совершаются вследствие действия двух возмущающих сил, частоты которых пусть будут p_1 и p_2. Соответствующие им колебательные движения выразятся формулами:

$$x_1 = R_1\sin(\mu_1 + p_1 t) \quad \text{и} \quad x_2 = R_2\sin(\mu_2 + p_2 t).$$

Результирующее колебательное движение будет

$$x = R_1\sin(\mu_1 + p_1 t) + R_2\sin(\mu_2 + p_2 t).$$

Заметив, что

$$R_1 = \frac{R_1 + R_2}{2} + \frac{R_1 - R_2}{2} \quad \text{и} \quad R_2 = \frac{R_1 + R_2}{2} - \frac{R_1 - R_2}{2},$$

будем иметь

$$x = \frac{R_1 + R_2}{2}[\sin(\mu_1 + p_1 t) + \sin(\mu_2 + p_2 t)] +$$

$$+ \frac{R_1 - R_2}{2}[\sin(\mu_1 + p_1 t) - \sin(\mu_2 + p_2 t)]$$

или

$$x = (R_1 + R_2)\cos\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} + \frac{p_1 + p_2}{2}t\right) +$$

$$+ (R_1 - R_2)\sin\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} + \frac{p_1 + p_2}{2}t\right).$$

Полагая

$$(R_1 + R_2)\cos\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2}t\right) = S$$

и

$$(R_1 - R_2)\sin\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2}t\right) = T,$$

мы получим

$$x = \sqrt{S^2 + T^2}\sin\left(\omega + \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} + \frac{p_1 + p_2}{2}t\right).$$

Это есть колебательное движение с переменной амплитудой

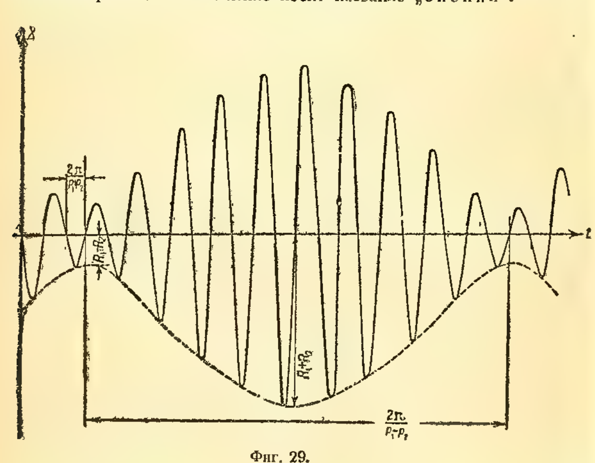
$$\sqrt{S^2 + T^2} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\cos[\mu_1 - \mu_2 + (p_1 - p_2)t]}$$

и фазой

$$\omega = \operatorname{arctg}\frac{T}{S} = \operatorname{arctg}\left[\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}\operatorname{tg}\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2}t\right)\right].$$

Предположим, что p_1 почти равно p_2. Тогда, с течением времени, амплитуда будет меняться от $R_1 - R_2$ (при $\cos[\mu_1 - \mu_2 + (p_1 - p_2)t] = -1$) до $R_1 + R_2$ (при $\cos[\mu_1 - \mu_2 + (p_1 - p_2)t] = +1$), а так как $p_1 - p_2$ — величина малая по сравнению с $p_1 + p_2$, то за время $\tau = \frac{4\pi}{p_1 + p_2}$ (период колебаний) амплитуда колебаний почти не изменится. Следовательно, вынужденные колебания будут иметь вид, изображенный на фиг. 29.

Если величина $R_1 - R_2$ мала сравнительно с $R_1 + R_2$, то колебательное движение будет то почти совсем затухать, то достигать значительного размаха. Это явление носит название „биений".



Фиг. 29.

34. Общее уравнение силы переменного тока. Пусть в цепь, в которой сила тока I возбуждается электродвижущей силой

$$E = E_0 \sin \omega t,$$

включены последовательно: емкость C, самоиндукция L и сопротивление R. Буквой E_0 обозначена наибольшая электродвижущая сила за период T; $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Подобно тому как это было сделано на стр. 56, мы придем к равенству

$$E = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I dt.$$

Заменяя в нем электродвижущую силу E ее значением и диференцируя

затем по времени t, мы получим общее диференциальное уравнение для силы переменного тока:

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=E_0\omega\cos\omega t, \qquad (56)$$

представляющее собой линейное неоднородное диференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэфициентами. Общий его интеграл

$$I=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}+I_0,$$

где r_1 и r_2 — корни характеристического уравнения

$$Lr^2+Rr+\frac{1}{C}=0,$$

а I_0 — частный интеграл.

Будем искать частный интеграл в форме

$$I_0=A\cos\omega t+B\sin\omega t,$$

где A и B — постоянные коэфициенты. Образуем производные $\frac{dI_0}{dt}$ и $\frac{d^2I_0}{dt^2}$ и подставим их значения в (56); получим

$$\left(\frac{A}{C}+RB\omega-AL\omega^2\right)\cos\omega t+\left(\frac{B}{C}-RA\omega-BL\omega^2\right)\sin\omega t=E_0\omega\cos\omega t,$$

откуда

$$\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)A+R\omega B=E_0\omega$$

и

$$\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)B-R\omega A=0.$$

Отсюда

$$A=\frac{E_0\omega\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)}{\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)^2+R^2\omega^2} \quad \text{и} \quad B=\frac{E_0\omega^2R}{\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)^2+R^2\omega^2},$$

а

$$I_0=\frac{E_0\omega\left[\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)\cos\omega t+R\omega\sin\omega t\right]}{\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)^2+R^2\omega^2}.$$

Полагая, далее,

$$\frac{L\omega^2-\frac{1}{C}}{R\omega}=\operatorname{tg}\gamma,$$

получим

$$I_0=\frac{RE_0\omega^2\sin(\omega t-\gamma)}{\left[\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)^2+R^2\omega^2\right]\cos\gamma}.$$

Но

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}}=\frac{R\omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)^2+R^2\omega^2}}.$$

Вследствие этого

$$I_0 = \frac{E_0 \sin(\omega t - \gamma)}{\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}}.$$

Числа r_2 и r_1, как это нетрудно видеть из формулы

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}},$$

оба отрицательны, в случае когда $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} \geqslant 0$. Если же $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0$, то r_1 и r_2 — числа комплексные. Но вещественные их части все-таки отрицательны. В силу этого, по мере увеличения времени t, двучлен

$$C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

стремится к нулю и с некоторого момента можно принять $I = I_0$. Общий же интеграл уравнения (56) будет

$$I = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \frac{E_0 \sin(\omega t - \gamma)}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}}.$$

§ 20. Способ вариации произвольных постоянных. Способ интегрирования линейных диференциальных уравнений со свободным членом, рассмотренный в предыдущих параграфах, замечателен тем, что, пользуясь им, мы находим общий интеграл без помощи квадратур. Но круг применения этого способа весьма ограничен. Если свободный член Q имеет вид, отличный от тех, которые нами были рассмотрены, то в большинстве случаев подобрать подходящую форму для частного решения y_0 весьма трудно и от отыскания его по способу неопределенных коэфициентов приходится отказаться.

Укажем здесь другой способ интегрирования линейных неоднородных диференциальных уравнений, данный Лагранжем и известный под названием способа вариации произвольных постоянных. Практически он более утомителен, но зато, пользуясь им, мы всегда решаем вопрос об интегрировании уравнения, сводя его к квадратурам. Полученные интегралы могут выражаться в конечном виде или нет, но во всяком случае, с точки зрения задачи интегрирования диференциального уравнения, мы, пользуясь методом Лагранжа, решение вопроса доводим до конца (см. § 6).

Переходим к изложению способа вариации произвольных постоянных. Заметим, что если предложено интегрировать уравнение

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + P_2 y^{(n-2)} + \ldots + P_n y = Q, \tag{30}$$

коэфициенты $P_1, P_2, \ldots, P_n$ которого суть функции от аргумента x или постоянные числа, то, откидывая свободный член Q и меняя обозначение y на z, получим уравнение

$$z^{(n)} + P_1 z^{(n-1)} + P_2 z^{(n-2)} + \ldots + P_n z = 0 \tag{31}$$

без свободного члена, соответствующее уравнению (30). Его общий интеграл

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n.$$

Здесь $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — частные решения (31), а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Идея способа вариации постоянных заключается в том, что общий интеграл уравнения (30) ищут в той же форме, которую имеет общий интеграл уравнения (31), т. е. полагают, что

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n, \tag{33}$$

считая, однако, что здесь $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — уже не постоянные, а некоторые функции от x, которые требуется определить. Функции эти связаны пока только одним условием (30), в остальном они совершенно произвольны. Чтобы их определить, мы должны подчинить их еще $(n-1)$ условиям, причем эти условия можем выбрать произвольно.

Составим

$$y' = C_1 z_1' + C_2 z_2' + \ldots + C_n z_n' + C_1' z_1 + C_2' z_2 + \ldots + C_n' z_n.$$

Выберем функции $C_1, C_2, \ldots, C_n$ так, чтобы

$$C_1' z_1 + C_2' z_2 + \ldots + C_n' z_n = 0; \tag{57}$$

в таком случае

$$y' = C_1 z_1' + C_2 z_2' + \ldots + C_n z_n'.$$

Далее,

$$y'' = C_1 z_1'' + C_2 z_2'' + \ldots + C_n z_n'' + C_1' z_1' + C_2' z_2' + \ldots + C_n' z_n'.$$

Выберем функции $C_1, C_2, \ldots, C_n$ так, чтобы

$$C_1' z_1' + C_2' z_2' + \ldots + C_n' z_n' = 0; \tag{58}$$

тогда

$$y'' = C_1 z_1'' + C_2 z_2'' + \ldots + C_n z_n''.$$

Поступая таким же образом и далее, получим, наконец,

$$C_1' z_1^{(n-2)} + C_2' z_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' z_n^{(n-2)} = 0, \tag{59}$$

причем

$$y^{(n-1)} = C_1 z_1^{(n-1)} + C_2 z_2^{(n-1)} + \ldots + C_n z^{(n-1)}.$$

Теперь n функций $C_1, C_2, \ldots, C_n$ подчинены n условиям. Составив еще раз производную, будем иметь

$$y^{(n)} = C_1 z_1^{(n)} + C_2 z_2^{(n)} + \ldots + C_n z_n^{(n)} + C_1' z_1^{(n-1)} + \\ + C_2' z_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' z_n^{(n-1)}.$$

Подставим значения $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ в уравнение (30), принимая при этом во внимание, что

$$z_1^{(n)}+P_1z_1^{(n-1)}+\ldots+P_nz_1=0,$$
$$z_2^{(n)}+P_1z_2^{(n-1)}+\ldots+P_nz_2=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z_n^{(n)}+P_1z_n^{(n-1)}+\ldots+P_nz_n=0$$

[ибо $z_1, z_2, \ldots, z_n$ суть частные решения уравнения (31)], мы находим

$$C_1'z_1^{(n-1)}+C_2'z_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'z_n^{(n-1)}=Q.$$

Соединяя это равенство в одну систему с (57), (58), (59) и т. д., мы получаем n уравнений:

$$C_1'z_1'+C_1'z_2'+\ldots+C_n'z_n'=0,$$
$$C_1'z_1''+C_2'z_2''+\ldots+C_n'z_n''=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_1'z_1^{(n-2)}+C_2'z_2^{(n-2)}+\ldots+C_n'z_n^{(n-2)}=0$$

и

$$C_1'z_1^{(n-1)}+C_2'z_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'z_n^{(n-1)}=Q$$

с n неизвестными $C_1', C_2', \ldots, C_n'$. Определяя из этой системы неизвестные [1]), находим

$$C_1'=\varphi_1(x),\quad C_2'=\varphi_2(x),\quad \ldots,\quad C_n'=\varphi_n(x),$$

откуда, интегрируя, имеем

$$C_1=\int\varphi_1(x)\,dx+\Gamma_1,$$
$$C_2=\int\varphi_2(x)\,dx+\Gamma_2,\quad \ldots,\quad C_n=\int\varphi_n(x)\,dx+\Gamma_n,$$

где $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ — произвольные постоянные.

Внося значения $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в выражение (33), получим общий интеграл в виде

$$y=z_1\int\varphi_1(x)\,dx+z_2\int\varphi_2(x)\,dx+\ldots+$$
$$+z_n\int\varphi_n(x)\,dx+\Gamma_1z_1+\Gamma_2z_2+\ldots+\Gamma_nz_n.$$

Мы видим, что нахождение полного интеграла привелось к отысканию n квадратур.

Пример. $y''+y=\operatorname{tg}x$.

Корни характеристического уравнения $r^2+1=0$: $r_1=i$ и $r_2=-i$. Общий интеграл уравнения $z''+z=0$ есть

$$z=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Будем искать общий интеграл заданного уравнения в той же форме, полагая

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

и считая C_1 и C_2 функциями от x.

[1]) Можно доказать, что написанная система всегда имеет решение, если частные решения $z_1, z_2, \ldots, z_n$ линейно-независимы.

Составляя производную, имеем

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_1' \cos x + C_2' \sin x.$$

Подчиняя функции C_1 и C_2 условию

$$C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \tag{60}$$

находим

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

и, следовательно,

$$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x - C_1' \sin x + C_2' \cos x.$$

Вносят значения y и y'' в заданное уравнение, имеем, после сокращений,

$$-C_1' \sin x + C_2' \cos x = \operatorname{tg} x. \tag{61}$$

Система уравнений (60) и (61) дает для C_1' и C_2' значения: $C_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$ и $C_2' = \sin x$, откуда

$$C_1 = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = -\int \frac{\sin^2 x \, d \sin x}{1 - \sin^2 x} = \sin x + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} + \Gamma_1,$$

$$C_2 = \int \sin x \, dx = -\cos x + \Gamma_2.$$

Общий интеграл

$$y = \frac{1}{2} \cos x \cdot \ln \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} + \Gamma_1 \cos x + \Gamma_2 \sin x.$$

35. Диференциальное уравнение колебаний индикатора. Индикатор есть прибор, служащий для записи давления (например, при минном взрыве). В основном он состоит из массивного цилиндра, в который заложена пружина, поддерживающая поршень, воспринимающий исследуемое давление. Обозначим площадь поршня буквой F, действующее на единицу площади поршня давление — буквой p, а вес поршня — буквой P. Весом пружины будем пренебрегать. Очевидно, что с течением времени давление меняется. Положим $p = f(t)$. В момент $t = 0$ перемещение поршня $z = 0$ и скорость $\frac{dz}{dt} = 0$. Искомым является вид функции $f(t)$. Индикатор дает возможность определить эту функцию по перемещениям z поршня, которые могут быть записаны на диаграмме.

На поршень действуют: внешнее давление, равное $F \cdot f(t)$, и сопротивление пружины.

Примем ось поршня за ось OZ и начальную длину пружины обозначим буквой l. В момент t длина пружины будет $l - z$. В таком случае сопротивление пружины, действующее на поршень, выразится через $-k\frac{z}{l}$, где k — коэфициент пропорциональности. Диференциальное уравнение движения поршня будет

$$\frac{P}{g} \frac{d^2 z}{dt^2} = F \cdot f(t) - \frac{kz}{l} \quad \text{или} \quad \frac{d^2 z}{dt^2} + n^2 z = \frac{F \cdot g}{P} f(t), \tag{62}$$

где $n^2 = \frac{kg}{Pl}$. Общий интеграл соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + n^2 z = 0$$

имеет вид

$$z = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt.$$

Будем искать общий интеграл неоднородного уравнения (62) в том же виде, но рассматривая C_1 и C_2 как функции от x. Составляем производную

$$\frac{dz}{dt} = -C_1 n \sin nt + C_2 n \cos nt + \frac{dC_1}{dt}\cos nt + \frac{dC_2}{dt}\sin nt$$

и выберем функции C_1 и C_2 так, чтобы

$$\frac{dC_1}{dt}\cos nt + \frac{dC_2}{dt}\sin nt = 0. \tag{63}$$

В таком случае $\frac{dz}{dt} = -C_1 n \sin nt + C_2 n \cos nt$.

Образуем затем вторую производную

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -C_1 n^2 \cos nt - C_2 n^2 \sin nt - \frac{dC_1}{dt} n \sin nt + \frac{dC_2}{dt} n \cos nt$$

и подставим ее значение и значение z в уравнение (62). После сокращений получим:

$$-\frac{dC_1}{dt}\sin nt + \frac{dC_2}{dt}\cos nt = \frac{Fg}{Pn} f(t). \tag{63a}$$

Из (63) и (63a) имеем:

$$\frac{dC_1}{dt} = -\frac{Fg}{Pn} f(t)\sin nt \quad \text{и} \quad \frac{dC_2}{dt} = \frac{Fg}{Pn} f(t)\cos nt,$$

откуда

$$C_1 = -\frac{Fg}{Pn}\int_0^t f(\tau)\sin n\tau\, d\tau + \Gamma_1$$

и

$$C_2 = \frac{Fg}{Pn}\int_0^t f(\tau)\cos n\tau\, d\tau + \Gamma_2.$$

Общий интеграл уравнения (62) имеет вид

$$z = \Gamma_1 \cos nt + \Gamma_2 \sin nt +$$
$$+ \frac{Fg}{Pn}\left[-\cos nt \int_0^t f(\tau)\sin n\tau\, d\tau + \sin nt \int_0^t f(\tau)\cos n\tau\, d\tau\right] \tag{64}$$

или, короче,

$$z = \Gamma_1 \cos nt + \Gamma_2 \sin nt + \frac{Fg}{Pn}\int_0^t f(\tau)\sin n(t-\tau)\, d\tau.$$

Как уже было указано, при $t=0$ имеем $z=0$ и $\frac{dz}{dt}=0$; это дает $\Gamma_1 = 0$, $\Gamma_2 = 0$, и

$$z = \frac{Fg}{Pn}\int_0^t f(\tau)\sin n(t-\tau)\, d\tau.$$

Отсюда, интегрируя по частям, получим:

$$z = \frac{Fg}{Pn} f(t) - \frac{Fg}{Pn}\int_0^t f'(\tau)\sin n(t-\tau)\, d\tau.$$

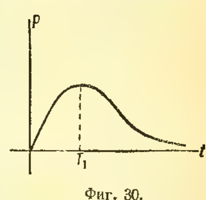
Если откинем второй член правой части полученного равенства, то получим $f(t) = \frac{Pnz}{Fg}$, т. е. значения искомой функции пропорциональны перемещениям z поршня.

Но показания индикатора соответствуют действительному изменению функции $f(t)$. Отсюда видно, что второй член

$$\varepsilon = -\frac{Pg}{Pn}\int_0^t f'(\tau)\sin n(t-\tau)\,d\tau \qquad (65)$$

представляет „погрешность“ показаний прибора. Имея в виду, что под знак интеграла входит производная $f'(\tau)$, мы заключаем, что эта погрешность обусловливается быстротой изменения давления.

График изменения давления при взрыве, т. е. вид функции $f(t)$, может быть изображен кривой, показанной на фиг. 30. Сначала, быстро возрастая, давление при $t = T_1$ достигает своего максимума, затем убывает и при некотором $t = T_2$ обращается в нуль. Период времени T_2 значительно больше T_1.



Фиг. 30.

Вопрос о величине погрешности индикатора и соображения, которыми следует руководствоваться при его проектировании, рассмотрен в работе академика А. Н. Крылова „О крешерах и индикаторах“, напечатанной в „Известиях Академии наук“, 1909 г., № 9.

§ 21. Уравнение Эйлера. Рассмотрим здесь один частный случай *уравнений с переменными коэфициентами*, так называемое уравнение Эйлера:

$$(ax+b)^n y^{(n)} + A_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots +$$
$$+ A_{n-1}(ax+b)y' + A_n y = Q, \qquad (66)$$

в которых $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a и b — постоянные, а Q есть функция от x.

Подстановкой $ax+b = e^t$ уравнение Эйлера легко приводится к уравнению с постоянными коэфициентами. Действительно, заменяя переменную x на t, будем иметь:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = ae^{-t}\frac{dy}{dt};$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = a^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right);$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = a^3e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right); \ldots$$

. . . .

$$y^{(n)} = a^ne^{-nt}\left(\frac{d^ny}{dt^n} + \ldots\right).$$

Теперь подставим значения производных в уравнение (66). Переменный коэфициент первого члена $(ax+b)^n = e^{nt}$ сократится со множителем e^{-nt}, входящим в состав $y^{(n)}$. То же самое случится и во всех

прочих членах. После приведения подобных придем к диференциальному линейному неоднородному уравнению

$$\frac{d^n y}{dt^n} + B_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + B_{n-1}\frac{dy}{dt} + B_n y = F(t)$$

с постоянными коэфициентами $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Пример. Проинтегрируем уравнение

$$(2x+1)^2 y'' - \left(x+\frac{1}{2}\right) y' + y = \ln\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Положим $2x+1=e^t$. Будем иметь

$$\frac{dt}{dx} = 2e^{-t}; \quad y' = 2e^{-t}\frac{dy}{dt} \quad \text{и} \quad y'' = 4e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Подставим полученные выражения в данное уравнение. После сокращений оно примет вид

$$4\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + y = t - \ln 2.$$

Характеристическое уравнение

$$4r^2 - 5r + 1 = 0$$

имеет корни $r_1 = 1$ и $r_2 = \frac{1}{4}$. Вследствие этого общий интеграл будет

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{0,25\,t} + y_0,$$

где y_0 — частное решение уравнения. Это решение мы ищем в форме

$$y_0 = At + B.$$

Последовательно находим:

$$\frac{dy_0}{dt} = A \quad \text{и} \quad \frac{d^2y_0}{dt^2} = 0; \quad -5A + At + B = t - \ln 2,$$

откуда

$$A = 1 \quad \text{и} \quad B = 5 - \ln 2.$$

Следовательно,

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{0,25\,t} + t + 5 - \ln 2$$

или

$$y = C_1(2x+1) + C_2(2x+1)^{1/4} + \ln(2x+1) + 5 - \ln 2.$$

Уравнения Эйлера можно также просто решить, не прибегая к подстановке $ax+b=e^t$. Пусть дано однородное уравнение Эйлера

$$(ax+b)^n y^{(n)} + A_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + \\ + A_{n-1}(ax+b)y' + A_n y = 0. \quad (67)$$

Ищем частное решение в виде

$$y = (ax+b)^r,$$

где r — постоянная. Подставив его в уравнение и сократив на $(ax+b)^r$, получим уравнение степени n для определения r:

$$a^n r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1) + \\ + A_1 a^{n-1} r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots + A_{n-1}ar + A_n = 0.$$

Если среди корней $r_1, r_2, \ldots, r_n$ этого уравнения нет равных, мы имеем n линейно-независимых решений уравнения (67):

$$y_1 = (ax+b)^{r_1}, \quad y_2 = (ax+b)^{r_2}, \quad \ldots, \quad y_n = (ax+b)^{r_n},$$

и общий интеграл этого уравнения будет

$$y = C_1(ax+b)^{r_1} + C_2(ax+b)^{r_2} + \ldots + C_n(ax+b)^{r_n}.$$

Если среди корней есть равные, например, если $r_1 = r_2 = \ldots = r_k$, то соответствующие частные решения будут:

$$y_1 = (ax+b)^{r_1}, \quad y_2 = (ax+b)^{r_1} \ln(ax+b), \quad \ldots,$$

$$y_k = (ax+b)^{r_1} [\ln(ax+b)]^{k-1}.$$

Рассмотрим еще случай мнимых корней. Если $r_1 = \alpha + i\beta$, то существует сопряженный ему корень $r_2 = \alpha - i\beta$ (мы предполагаем, что коэфициенты a, b, $A_1, \ldots, A_n$ — вещественные). Соответственные частные решения будут:

$$y_1 = (ax+b)^{\alpha+i\beta} = (ax+b)^{\alpha} e^{i\beta \ln(ax+b)} =$$

$$= (ax+b)^{\alpha} \{ \cos[\beta \ln(ax+b)] + i \sin[\beta \ln(ax+b)] \};$$

$$y_2 = (ax+b)^{\alpha} \{ \cos[\beta \ln(ax+b)] - i \sin[\beta \ln(ax+b)] \}.$$

Полагая теперь в общем интеграле

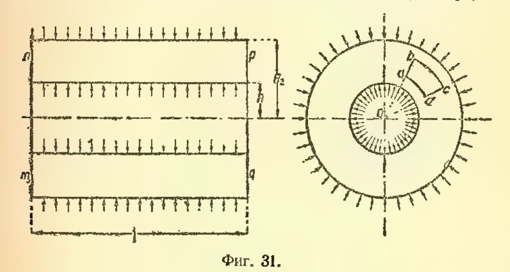
$$C_1 + C_2 = \Gamma_1, \quad i(C_1 - C_2) = \Gamma_2,$$

мы придадим ему вид

$$y = (ax+b)^{\alpha} \{ \Gamma_1 \cos[\beta \ln(ax+b)] + \Gamma_2 \sin[\beta \ln(ax+b)] \} +$$

$$+ C_3(ax+b)^{r_3} + \ldots + C_n(ax+b)^{r_n}.$$

36. *Задача Ламе.* Среди задач технического характера, приводящихся к уравнению вида, рассмотренного в предыдущем параграфе, отметим



Фиг. 31.

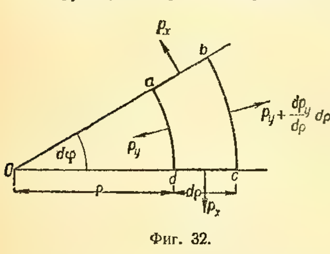
весьма известную задачу Ламе. Состоит она в том, чтобы, зная равномерно распределенные давления, действующие на внутреннюю и наружную поверхности цилиндрической трубки (фиг. 31), определить напряжения в точках самой трубки.

Вследствие одинаковых условий, как деформации, так и напряжения в поперечных сечениях, расположенных вдоль трубки, должны быть одними и теми же. Можно поэтому ограничиться трубкой, длина которой равна единице. Обозначим через R_1 — радиус внутренней, а R_2 —

радиус внешней цилиндрических поверхностей трубки. Выделим элемент $abcd$, ограниченный цилиндрическими поверхностями радиусов ρ и $\rho+d\rho$ и двумя меридиональными сечениями Ob и Oc, образующими угол $d\varphi$. Этот элемент находится в равновесии под действием всех приложенных к нему сил. Расположение напряжений на поверхностях элемента изображено на фиг. 32. Напряжения на гранях ab и cd обозначим через p_x, а на гранях ad и bc — через p_y и $p_y+\frac{dp_y}{d\rho}d\rho$.

Если P и p обозначают давления на внешнюю и внутреннюю поверхности трубки, то граничные условия таковы:

$$\left.\begin{aligned} p_y &= -p \text{ при } \rho = R_1 \\ \text{и} \quad p_y &= -P \text{ при } \rho = R_2. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$



Фиг. 32.

Установим связь между p_x и p_y.

На грани ab и cd действуют силы $p_x \cdot d\rho \cdot 1$. Сумма их проекций на направление Ob равна

$$-p_x \cdot d\rho \cdot \sin(d\varphi),$$

или

$$-p_x \cdot d\rho \cdot d\varphi,$$

если принять $\sin d\varphi = d\varphi$.

На грани ad и bc действуют силы

$$p_y \cdot \rho \cdot 1 \cdot d\varphi \quad \text{и} \quad \left(p_y+\frac{dp_y}{d\rho}d\rho\right)\cdot(\rho+d\rho)\cdot 1 \cdot d\varphi.$$

Проектируя эти две силы на направление Ob и полагая, что $\cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right)=1$, получим величину проекции равнодействующей

$$p_y\,d\rho\,d\varphi+\frac{dp_y}{d\rho}\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

если откинем член $\frac{dp_y}{d\rho}\cdot(d\rho)^2\,d\varphi$.

Приравнивая нулю сумму проекций всех сил на направление Ob, приложенных к элементу $abcd$, после сокращения на $d\rho\,d\varphi$ получим уравнение

$$p_y+\frac{dp_y}{d\rho}\rho-p_x=0. \tag{69}$$

Далее заметим, что вследствие симметрии как формы трубки, так и распределения давлений все точки трубки при деформации перемещаются в радиальном направлении. Если перемещение точки a обозначим через u, то перемещение точки b будет

$$u+\frac{du}{d\rho}d\rho.$$

В общем элемент $d\rho$ радиуса получает удлинение $\frac{du}{d\rho}d\rho$. Вследствие этого относительное удлинение в радиальном направлении: $e_y=\frac{du}{d\rho}$.

После деформации дуга ad займет положение a_1d_1 (фиг. 33), причем $\frac{a_1d_1}{ad}=\frac{Oa_1}{Oa}$. Следовательно, относительное удлинение $e_x=\frac{a_1d_1-ad}{ad}=$ $=\frac{Oa_1-Oa}{Oa}=\frac{\rho+u-\rho}{\rho}=\frac{u}{\rho}$. Выходит, что элемент $abcd$ растягивается по двум перпендикулярным направлениям. Но для случая такого растяжения, как известно, имеют место формулы:

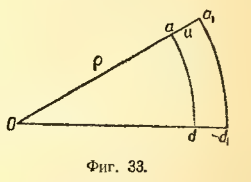
$$p_x=\frac{E}{1-\sigma^2}(e_x+\sigma e_y) \quad \text{и} \quad p_y=\frac{E}{1-\sigma^2}(e_y+\sigma e_x),$$

где E есть модуль Юнга материала трубки, а σ — пуассоново отношение. Заменяя e_x и e_y их значениями, получим

$$p_x=\frac{E}{1-\sigma^2}\left(\frac{u}{\rho}+\sigma\frac{du}{d\rho}\right)$$

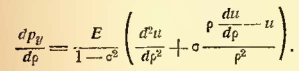
и

$$p_y=\frac{E}{1-\sigma^2}\left(\frac{du}{d\rho}+\sigma\frac{u}{\rho}\right).$$



Фиг. 33.

Теперь образуем производную



$$\frac{dp_y}{d\rho}=\frac{E}{1-\sigma^2}\left(\frac{d^2u}{d\rho^2}+\sigma\frac{\rho\frac{du}{d\rho}-u}{\rho^2}\right).$$

Подставим значения p_x, p_y и $\frac{dp_y}{d\rho}$ в уравнение (69). После упрощений приходим к диференциальному уравнению

$$\rho^2\frac{d^2u}{d\rho^2}+\rho\frac{du}{d\rho}-u=0, \qquad (70)$$

представляющему частный случай уравнения (66).

Полагая

$$u=\rho^r,$$

получаем для величины r уравнение: $r^2-1=0$.

Отсюда $r_1=1$ и $r_2=-1$, и общий интеграл

$$u=C_1\rho+C_2\frac{1}{\rho},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Для их определения составим

$$\frac{du}{d\rho}=C_1-\frac{C_2}{\rho^2},$$

и выражения u и $\frac{du}{d\rho}$ подставим в формулы, выражающие p_x и p_y. Результат будет таков:

$$p_x=\frac{E}{1-\sigma^2}\left[C_1(1+\sigma)+\frac{C_2}{\rho^2}(1-\sigma)\right],$$

$$p_y=\frac{E}{1-\sigma^2}\left[C_1(1+\sigma)-\frac{C_2}{\rho^2}(1-\sigma)\right].$$

Подчиняя p_y граничным условиям (68), получим:

$$-P=\frac{E}{1-\sigma^2}\left[C_1(1+\sigma)-\frac{C_2}{R_2^2}(1-\sigma)\right]$$

и

$$-p=\frac{E}{1-\sigma^2}\left[C_1(1+\sigma)-\frac{C_2}{R_1^2}(1-\sigma)\right].$$

Отсюда

$$C_1=\frac{(1-\sigma)(R_1^2p-R_2^2P)}{E(R_2^2-R_1^2)}$$

и

$$C_2=\frac{(1+\sigma)(p-P)R_1^2R_2^2}{E(R_2^2-R_1^2)}.$$

Значит

$$\left.\begin{aligned} p_x&=\frac{R_1^2p-R_2^2P}{R_2^2-R_1^2}+\frac{(p-P)R_1^2R_2^2}{\rho^2(R_2^2-R_1^2)} \\ &\text{и} \\ p_y&=\frac{R_1^2p-R_2^2P}{R_2^2-R_1^2}-\frac{(p-P)R_1^2R_2^2}{\rho^2(R_2^2-R_1^2)}. \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

Напряжение p_x возрастает при уменьшении ρ и имеет максимум при $\rho=R_1$, а минимум — при $\rho=R_2$.

Подставляя выражения C_1 и C_2 в формулу

$$u=C_1\rho+\frac{C_2}{\rho},$$

находим, что перемещение

$$u=\frac{1-\sigma}{E}\,\frac{R_1^2p-R_2^2P}{R_2^2-R_1^2}\rho+\frac{1+\sigma}{E}\,\frac{(p-P)R_1^2R_2^2}{(R_2^2-R_1^2)\rho}. \qquad (71')$$

Формулы (71) и (71′) характеризуют явление в отношении как напряжений, так и деформаций.

ГЛАВА III.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ЗАДАЧИ.

§ 22. Эллиптические интегралы и эллиптические функции Якоби.

Интегралы вида

$$\int f(x, R)\,dx,$$

где

$$R=\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e} \quad \text{или} \quad R=\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d},$$

а $f(x, R)$ есть рациональная функция как относительно x, так и относительно R, называют эллиптическими. Лежандр

показал, что все эллиптические интегралы приводятся к трем основным:

$$1.\quad u=\int\limits_0^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

$$2.\quad v=\int\limits_0^{\xi}\frac{\xi^2\,d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$$

и

$$3\quad w=\int\limits_0^{\xi}\frac{d\xi}{(1+n\xi^2)\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

где $|k|<1$.

Число k называется модулем, а n — параметром интеграла. Полагая $\xi=\sin\varphi$, мы первый интеграл приведем к виду

$$F(\varphi,\ k)=\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{72}$$

Для второго имеем

$$\int\limits_0^{\xi}\frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}=\frac{1}{k^2}\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\frac{1}{k^2}\int\limits_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{k^2}[F(\varphi,\ k)-E(\varphi,\ k)],$$

где

$$E(\varphi,\ k)=\int\limits_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi. \tag{72a}$$

Третий — преобразуется в интеграл

$$\Pi(\varphi,\ k)=\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Полученные интегралы $F(\varphi,\ k)$, $E(\varphi, k)$ и $\Pi(\varphi,\ k)$ называются эллиптическими интегралами, приведенными к нормальным формам Лежандра. Число φ называется их амплитудой.

Вычисление дуги эллипса приводится к нахождению интеграла $E(\varphi,\ k)$, что и дало повод к названию всего рассматриваемого класса интегралов эллиптическими.

Если $k=0$, то первый из рассмотренных интегралов дает

$$u=\int\limits_0^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=\operatorname{Arcsin}\xi.$$

Но известно, что в применениях важна не многозначная функция $u=\operatorname{Arcsin}\xi$, а однозначная $\xi=\sin u$, т. е. та функция, для которой аргументом служит сам интеграл u. Иначе говоря, практически важно рассматривать верхний предел ξ как функцию самого интеграла, или, как говорят, обратить интеграл u. Это обстоятельство и привело Абеля и Якоби к мысли обратить интеграл $F(\varphi,\ k)$, рассматривая его амплитуду φ как функцию самого инте-

грала. На этой базе и была создана теория эллиптических функций, имеющая огромное значение для ряда отраслей математики и ее приложений.

То обстоятельство, что φ является амплитудой интеграла $F(\varphi, k)$, который мы кратко обозначим буквой u, выражают так:

$$\varphi = \operatorname{am} u.$$

В таком случае $\xi = \sin\varphi = \sin \operatorname{am} u$, $\sqrt{1-\xi^2} = \cos\varphi = \cos \operatorname{am} u$.

Введем еще обозначение: $\sqrt{1-k^2\xi^2} = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Delta \operatorname{am} u$. Эти три функции короче обозначают так:

$$\sin \operatorname{am} u = \operatorname{sn} u, \quad \cos \operatorname{am} u = \operatorname{cn} u \quad \text{и} \quad \Delta \operatorname{am} u = \operatorname{dn} u.$$

Функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ известны под именем эллиптических функций Якоби. Отметим некоторые их свойства. Имея в виду практические применения, ограничимся вещественными значениями аргумента. Если же придется упомянуть о мнимых его значениях, то это будет оговорено особо.

Легко видеть, что

$$\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u \quad \text{и} \quad \operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn} u,$$

т. е. что функция sn нечетна, а функции cn и dn — четны.

Функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ связаны соотношениями:

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1, \tag{73}$$

которые дают возможность вычислить две из них, когда значение третьей известно.

Так как $u = 0$ при $\varphi = 0$, то

$$\operatorname{sn} 0 = 0; \quad \operatorname{cn} 0 = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{dn} 0 = 1.$$

Диференцируя первый из основных трех интегралов, будем иметь

$$\frac{d\xi}{du} = \sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}.$$

Функция $\xi = \operatorname{sn} u$ служит интегралом этого диференциального уравнения, которое можно переписать еще и так:

$$\frac{d \operatorname{sn} u}{du} = \operatorname{cn} u \cdot \operatorname{dn} u.$$

Диференцируя равенства (73), можно получить еще две такие формулы:

$$\frac{d \operatorname{cn} u}{du} = -\operatorname{sn} u \cdot \operatorname{dn} u \quad \text{и} \quad \frac{d \operatorname{dn} u}{du} = -k^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u.$$

Если в интеграле $F(\varphi, k)$ амплитуду φ возьмем равной $\frac{\pi}{2}$, то интеграл называется полным эллиптическим интегралом первого рода. Обозначив этот интеграл через K, будем иметь

$$\mathrm{K} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{74}$$

Полный эллиптический интеграл, модуль которого k' связан с модулем k соотношением

$$k^2+k'^2=1,$$

будем обозначать через K'. Модуль k' называют дополнительным для модуля k. Очевидно,

$$\operatorname{sn}\mathrm{K}=\sin\frac{\pi}{2}=1, \quad \operatorname{cn}\mathrm{K}=0 \quad \text{и} \quad \operatorname{dn}\mathrm{K}=k'.$$

Иногда вводят обозначение $k=\sin\gamma$. Величина γ называется модулярным углом эллиптического интеграла.

Эллиптические функции, подобно круговым, подчиняются формуле сложения. Эту формулу можно установить, интегрируя диференциальное уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=0, \tag{75}$$

замечательное тем, что в то время как каждый диференциал, находящийся в левой части уравнения, не интегрируется в конечном виде, диференциальное уравнение имеет алгебраический интеграл.

Это открытие, сделанное Эйлером, можно рассматривать как начало возникновения теории эллиптических функций. Эйлер нашел свою теорему, решая задачу о притяжеиии точки двумя неподвижными центрами. Приведем здесь прием интегрирования уравнения (75), данный Дарбу.

Вводя переменную t при помощи уравнений

$$dt=\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{-dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

получим

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=(1-x^2)(1-k^2x^2)$$

и

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(1-y^2)(1-k^2y^2).$$

Диференцируя эти равенства по переменной t и сокращая результаты на $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$, будем иметь

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-(1+k^2)x+2k^2x^3 \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-(1+k^2)y+2k^2y^3.$$

Отсюда

$$y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}=2k^2xy(x^2-y^2). \tag{76}$$

Далее,

$$y^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-x^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(y^2-x^2)(1-k^2x^2y^2). \tag{77}$$

Деля (76) на (77), найдем

$$\frac{y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}}{y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}}=-\frac{2k^2xy\left(y\frac{dx}{dt}+x\frac{dy}{dt}\right)}{1-k^2x^2y^2}.$$

Но так как

$$y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)$$

и

$$-2k^2xy\left(y\frac{dx}{dt}+x\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(1-k^2x^2y^2),$$

то заменяя, найдем

$$\frac{d}{dt}\left[\ln\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)\right]=\frac{d}{dt}\left[\ln(1-k^2x^2y^2)\right].$$

Отсюда, интегрируя, получим

$$\frac{y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}}{1-k^2x^2y^2}=C,$$

где C — постоянная интегрирования.

Теперь, заменив $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ их значениями, будем иметь

$$\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}=C. \qquad (78)$$

Такова алгебраическая форма интеграла уравнения (75). Далее положим

$$\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=u \quad \text{и} \quad \int\limits_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=v, \qquad (79)$$

т. е. $x=\operatorname{sn}u$ и $y=\operatorname{sn}v$; следовательно,

$$\sqrt{1-x^2}=\operatorname{cn}u,\quad \sqrt{1-k^2x^2}=\operatorname{dn}u;$$
$$\sqrt{1-y^2}=\operatorname{cn}v,\quad \sqrt{1-k^2y^2}=\operatorname{dn}v.$$

В таком случае (78) примет вид

$$\frac{\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{cn}v\cdot\operatorname{dn}v+\operatorname{sn}v\cdot\operatorname{cn}u\cdot\operatorname{dn}u}{1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{sn}^2v}=C. \qquad (80)$$

Но, с другой стороны, ввиду равенств (79), можно уравнение (75) переписать так:

$$du+dv=0,$$

т. е.

$$u+v=\Gamma, \qquad (81)$$

где Γ — постоянная интегрирования.

Положим теперь в равенствах (80) и (81) $v=0$. В таком случае $\operatorname{sn}v=0$, $\operatorname{cn}v=1$ и $\operatorname{dn}v=1$. Следовательно,

$$\operatorname{sn}u=C \quad \text{и} \quad u=\Gamma,$$

т. е.

$$C=\operatorname{sn}\Gamma.$$

Внося сюда значения C и Γ из (80) и (81), находим формулу сложения функций sn:

$$\operatorname{sn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{cn}v\cdot\operatorname{dn}v+\operatorname{sn}v\cdot\operatorname{cn}u\cdot\operatorname{dn}u}{1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{sn}^2v}. \qquad (82)$$

Формула сложения для функций cn может быть установлена так:

$$\operatorname{cn}^2(u+v)=1-\operatorname{sn}^2(u+v)=$$

$$=\frac{(1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{sn}^2v)^2-(\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{cn}v\cdot\operatorname{dn}v+\operatorname{sn}v\cdot\operatorname{cn}u\cdot\operatorname{dn}u)^2}{(1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{sn}^2v)^2}.$$

Заменяя в числителе $(1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{sn}^2v)^2$ через $(\operatorname{cn}^2u+\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{dn}^2v)\times$ $\times(\operatorname{cn}^2v+\operatorname{sn}^2v\cdot\operatorname{dn}^2u)$, преобразуем его к виду

$$(\operatorname{cn}u\cdot\operatorname{cn}v-\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{sn}v\operatorname{dn}u\cdot\operatorname{dn}v)^2.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей полученного равенства, получим

$$\operatorname{cn}(u+v)=\pm\frac{\operatorname{cn}u\cdot\operatorname{cn}v-\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{sn}v\cdot\operatorname{dn}u\cdot\operatorname{dn}v}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{sn}^2v}.$$

Положим $v=0$. Правая часть равенства сделается равной $\pm\operatorname{cn}u$. Это показывает, что необходимо взять знак плюс. Таким образом

$$\operatorname{cn}(u+v)=\frac{\operatorname{cn}u\cdot\operatorname{cn}v-\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{sn}v\cdot\operatorname{dn}u\cdot\operatorname{dn}v}{1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{sn}^2v}. \qquad (83)$$

Для функции же dn

$$\operatorname{dn}^2(u+v)=1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2(u+v)=$$

$$=\frac{(1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{sn}^2v)^2-k^2(\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{cn}v\cdot\operatorname{dn}v+\operatorname{sn}v\cdot\operatorname{cn}u\cdot\operatorname{dn}u)^2}{(1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{sn}^2v)^2}=$$

$$=\frac{(\operatorname{dn}u\cdot\operatorname{dn}v-k^2\cdot\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{sn}v\cdot\operatorname{cn}u\cdot\operatorname{cn}v)^2}{(1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{sn}^2v)^2}.$$

Извлекаем корень и опять, полагая $v=0$, выбираем знак. Мы находим

$$\operatorname{dn}(u+v)=\frac{\operatorname{dn}u\cdot\operatorname{dn}v-k^2\cdot\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{sn}v\cdot\operatorname{dn}u\cdot\operatorname{dn}v}{1-k^2\cdot\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{sn}^2v}. \qquad (84)$$

Полагая в (82), (83) и (84) $u=v=K$, будем иметь:

$$\operatorname{sn}2K=0,\quad \operatorname{cn}2K=-1\quad \text{и}\quad \operatorname{dn}2K=1.$$

Подобно круговым эллиптические функции имеют формулы приведения. Отметим некоторые из них. Полагая в тех же формулах (82), (83) и (84) $v=K$ и затем $v=2K$, получим:

$$\operatorname{sn}(u+K)=\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u},\quad \operatorname{cn}(u+K)=\frac{-k'\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u},\quad \operatorname{dn}(u+K)=\frac{k'}{\operatorname{dn}u};$$

$$\operatorname{sn}(u+2K)=-\operatorname{sn}u,\quad \operatorname{cn}(u+2K)=-\operatorname{cn}u,\quad \operatorname{dn}(u+2K)=\operatorname{dn}u.$$

Из последнего равенства следует, что периодом функции dn служит 2K. Замена в двух предшествующих равенствах u на $u+2K$ приводит к результату:

$$\operatorname{sn}(u+4K)=\operatorname{sn}u\quad \text{и}\quad \operatorname{cn}(u+4K)=\operatorname{cn}u,$$

из которого видно, что для функций sn и cn периодом служит 4K.

Кроме этих вещественных периодов эллиптические функции имеют еще мнимые периоды и являются функциями двоякопериодическими. Эти вторые периоды долго ускользали от внимания математиков и их открытию мы обязаны Абелю и Якоби. Двоякая периодичность эллипти-

ческих функций может быть выражена формулами (m и n — целые числа):

$$\operatorname{sn}(u+m\cdot 4K+n\cdot 2iK')=\operatorname{sn} u,$$

$$\operatorname{cn}[u+m\cdot 4K+n(2K+2iK')]=\operatorname{cn} u$$

и

$$\operatorname{dn}(u+m\cdot 2K+n\cdot 4iK')=\operatorname{dn} u,$$

которые мы приводим здесь без доказательства.

Обычно характерными для всякой функции являются те значения аргумента, при которых эта функция обращается в нуль или в бесконечность. (Нули и полюсы.) Нулями служат:

$$m\cdot 2K+n\cdot 2iK' \quad \text{для функции sn,}$$

$$K+m\cdot 2K+n\cdot 2iK' \quad \text{для функции cn}$$

и

$$K+iK'+m\cdot 2K+n\cdot 2iK' \quad \text{для функции dn;}$$

полюсы для всех трех функций выражаются формулой

$$iK'+m\cdot 2K+n\cdot 2iK'.$$

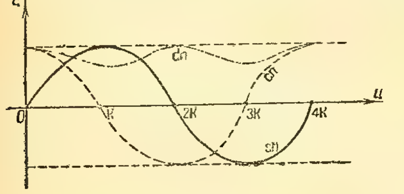
Отметим еще те случаи, когда эллиптические функции вырождаются в круговые или в гиперболические. Это имеет место, если модуль $k=0$, или $k=1$. Действительно, при $k=0$, как это нетрудно видеть, $\operatorname{sn} u=\sin u$ и тем самым $\operatorname{cn} u=\cos u$ и $\operatorname{dn} u=1$. Если же $k=1$, то интеграл

$$u=\int_0^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$$

переходит в интеграл

$$u=\int_0^{\xi}\frac{d\xi}{1-\xi^2}.$$

Отсюда



Фиг. 34.

$$u=\ln\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}, \quad \text{т. е.} \quad \xi=\frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1}=\frac{e^{u}-e^{-u}}{e^{u}+e^{-u}}=\operatorname{th} u.$$

Отсюда

$$\operatorname{sn} u=\operatorname{th} u,$$

$$\operatorname{cn} u=\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 u}=\frac{1}{\operatorname{ch} u} \quad \text{и} \quad \operatorname{dn} u=\frac{1}{\operatorname{ch} u}.$$

Мы видим, что круговые и гиперболические функции представляют частные случаи эллиптических функций.

Откладывая по оси Ou (фиг. 34) вещественные значения аргумента u, а по направлению оси $O\xi$ — соответствующие значения функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$, мы получаем графики этих функций. Надо, конечно, иметь в виду, что график каждой из этих функций принимает вполне определенный вид только тогда, когда дан модуль k. Для

другого модуля график, сохраняя то же общее очертание, изменит свою форму.

§ 23. Эллиптические функции Вейерштрасса. В своих лекциях, читанных в Берлинском университете, Карл Вейерштрасс развил учение об эллиптических функциях в форме, отличной от той, в какой оно было развито Абелем и Якоби. За основной интеграл Вейерштрасс принимает

$$u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}. \tag{85}$$

Коэфициенты g_2 и g_3 приведенного многочлена третьей степени будем считать вещественными. Рассматривая u как аргумент, а нижний предел интеграла — z — как его функцию, обозначим эту функцию через $\wp u$. Обращая интеграл, будем иметь

$$z = \wp u.$$

Если желательно подчеркнуть, что z зависит не только от u, но и от коэфициентов g_2 и g_3, то пишут:

$$z = \wp(u;\ g_2,\ g_3);$$

g_2 и g_3 называют инвариантами функции $\wp u$. Из (85) следует, что $u = 0$ при $z = \infty$, иначе говоря, $\wp 0 = \infty$. Таким образом выходит, что $\wp u$ есть тот частный интеграл уравнения

$$\frac{dz}{du} = -\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3},$$

который при $u = 0$ обращается в бесконечность.

В изложении Вейерштрасса функция $\wp u$ и ее производная $\wp' u$ играют ту же роль, что и функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ в изложении Якоби.

Устанавливая формулу сложения для функции $\wp u$, будем исходить из уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} + \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = 0,$$

в котором положим

$$4x^3 - g_2 x - g_3 = X \quad \text{и} \quad 4y^3 - g_2 y - g_3 = Y.$$

Уравнение перепишется так:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0.$$

Полагая

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{X}} = -\frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

находим

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = X \quad \text{и} \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = Y.$$

Диференцируя эти равенства по переменной t и сокращая результаты на $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$, получим

$$2\frac{d^2x}{dt^2}=12x^2-g_2 \quad \text{и} \quad 2\frac{d^2y}{dt^2}=12y^2-g_2.$$

Далее положим: $x+y=\sigma$ и $x-y=\tau$. Будем иметь

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}=6(x^2+y^2)-g_2$$

или

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2}=3(\sigma^2+\tau^2)-g_2.$$

Вместе с тем

$$\frac{d\sigma}{dt}\cdot\frac{d\tau}{dt}=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=4(x^3-y^3)-g_2(x-y)$$

или

$$\frac{d\sigma}{dt}\cdot\frac{d\tau}{dt}=\tau(3\sigma^2+\tau^2-g_2).$$

Заметив, что

$$\tau\frac{d^2\sigma}{dt^2}-\frac{d\sigma}{dt}\cdot\frac{d\tau}{dt}=2\tau^3,$$

умножим обе части этого равенства на $\frac{2}{\tau^3}\frac{d\sigma}{dt}$; мы получим

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right]=\frac{d(4\sigma)}{dt}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2=4\sigma+4\alpha \quad \text{и} \quad \frac{d\sigma}{dt}=2\tau\sqrt{\sigma+\alpha},$$

где α — произвольная постоянная.

Но

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=\sqrt{X}-\sqrt{Y}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{X}-\sqrt{Y}=2(x-y)\sqrt{x+y+\alpha},$$

или

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{X}-\sqrt{Y}}{x-y}\right)^2=x+y+\alpha. \tag{86}$$

Теперь положим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}=u \quad \text{и} \quad \int\frac{dy}{\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}}=v.$$

Будем иметь:

$$du+dv=0 \quad \text{и} \quad u+v=\beta, \tag{87}$$

где β — новая постоянная.

Устанавливая зависимость между α и β, положим в равенстве (87) $v=0$. В таком случае $\beta=u$. Но при $v=0$ функция $\wp v=\infty$, т. е. $y=\infty$, и равенство (86), переписанное в виде

$$\alpha+x=\frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{Y}-\sqrt{X}}{y-x}\right]^2-y,$$

становится неопределенным. Вследствие этого положим, что $y=t^2$, и разложим выражение $\frac{\sqrt{Y}-\sqrt{X}}{y-x}$ в ряд по степеням t.

Сначала заметим, что

$$\sqrt{Y}=2t^3\sqrt{1-\frac{g_2}{4t^4}-\frac{g_3}{4t^6}}=2t^3\left(1+\frac{A}{t^4}+\ldots\right).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}(\sqrt{Y}-\sqrt{X})=t^3\left(1-\frac{\sqrt{X}}{2}\,\frac{1}{t^3}+\frac{A}{t^4}+\ldots\right).$$

Вместе с тем

$$\frac{1}{y-x}=\frac{1}{t^2\left(1-\frac{x}{t^2}\right)}=\frac{1}{t^2}\left(1+\frac{x}{t^2}+\frac{x^2}{t^4}+\ldots\right).$$

Перемножим два последних равенства и, после возвышения результата в квадрат, получим

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{Y}-\sqrt{X}}{y-x}\right)^2=t^2\left(1-\frac{\sqrt{X}}{2}\cdot\frac{1}{t^3}+\frac{A}{t^4}+\ldots\right)^2\left(1+\frac{x}{t^2}+\frac{x^2}{t^4}+\ldots\right)^2=$$

$$=t^2\left(1+\frac{x}{t^2}+\frac{B}{t^3}+\ldots\right)^2=t^2+2x+\frac{C}{t}+\ldots$$

Теперь мы видим, что при $v=0$, т. е. при $y=t^2=\infty$, будем иметь $\alpha+x=2x$, откуда $\alpha=\wp u$. Следовательно,

$$\alpha=\wp\mathfrak{z}.$$

Заметим еще, что $\sqrt{X}=\wp' u$ и $\sqrt{Y}=\wp' v$. Тогда случай (86) дает:

$$\wp(u+v)+\wp u+\wp v=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}\right)^2.$$

Равенство это выражает формулу сложения для функции $\wp$.

Корни многочлена $4z^3-g_2z-g_3$ обозначим буквами e_1, e_2 и e_3, так что

$$4z^3-g_2z-g_3=4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3).$$

Если дискриминант $\Delta=g_2^3-27g_3^2$ положителен, то все три корня вещественны. Если же Δ отрицателен, то из трех корней два комплексны.

Пусть $\Delta>0$. Будем считать, что $e_1>e_2>e_3$.

В интеграле

$$u=\int_z^\infty\frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$$

положим

$$z=e_3+\frac{e_1-e_3}{\sin^2\varphi}. \qquad (88)$$

Тогда

$$\sqrt{e_1-e_3}\;u=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad (89)$$

где $k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$. Отсюда следует, что $\varphi = \operatorname{am}(u\sqrt{e_1 - e_3})$ и $\sin\varphi = \operatorname{sn}(u\sqrt{e_1 - e_3})$. Следовательно,

$$\wp u = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(u\sqrt{e_1 - e_3})}. \tag{90}$$

Это весьма важное соотношение между функциями $\wp$ и sn может служить для вычисления значения функции $\wp u$, если дано u и инварианты g_2 и g_3 и если $\Delta > 0$.

Пусть теперь $\Delta < 0$. Положим

$$e_1 = m + ni \quad \text{и} \quad e_3 = m - ni.$$

Так как $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, то $e_2 = -2m$. Вместе с тем

$$m^2 + n^2 = e_1 e_3 = \frac{g_3}{4e_2}, \quad \text{т. е.} \quad n^2 = \frac{g_3}{4e_2} - \frac{e_2^2}{4}.$$

Применим к интегралу

$$u = \int\limits_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4(z - e_2)\left[(z - m)^2 + n^2\right]}}$$

подстановку $z = e_2 + H\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}$, где $H = \sqrt{9m^2 + n^2}$. Мы получим

$$u = \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{H\left(1 + \operatorname{ctg}^4\frac{\varphi}{2}\right) + 3e_2\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{H}} \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^4\frac{\varphi}{2} + \cos^4\frac{\varphi}{2} + \frac{3e_2}{H}\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}}},$$

или

$$u = \frac{1}{2\sqrt{H}} \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

где $k^2 = \frac{1}{2} - 3\frac{e_2}{H}$. Отсюда следует, что $\varphi = \operatorname{am}(2u\sqrt{H})$. И так как $z = \wp u$, то имеем

$$\wp u = e_2 + H\frac{1 + \operatorname{cn}(2u\sqrt{H})}{1 - \operatorname{cn}(2u\sqrt{H})}. \tag{91}$$

Эта формула служит для вычисления функции $\wp u$ в случае, когда $\Delta < 0$ и когда известны g_2 и g_3 и задан аргумент u.

Выявим периоды функции $\wp u$. Если $\Delta > 0$, то заменим в (90) аргумент u на $u + \frac{2K}{\sqrt{e_1 - e_3}}$.

Здесь мы полагаем

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

или, как это следует из формул (88) и (89),

$$K = \sqrt{e_1 - e_3} \int_{e_1}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}.$$

Тогда получим

$$\wp\left(u + \frac{2K}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\mathrm{sn}^2 (u\sqrt{e_1 - e_3} + K)} =$$

$$= e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\mathrm{sn}^2 (u\sqrt{e_1 - e_3})} = \wp u.$$

Полагая $\frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}} = \omega_1$, получим $\wp(u + 2\omega_1) = \wp u$. Мы видим, что $2\omega_1$ служит периодом функции $\wp u$.

Если $u = \omega_1$, то, как это видно из (89), амплитуда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а из (88) следует, что $z = e_1$. Следовательно,

$$\wp(\omega_1) = e_1, \tag{92}$$

причем

$$\omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}.$$

Можно показать, что кроме вещественного периода $2\omega_1$, при $\Delta > 0$, функция $\wp u$ имеет еще мнимый период

$$2\omega_3 = \frac{2iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}} = 2 \int_{e_2}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

причем $\wp(\omega_3) = e_3$.

В случае $\Delta < 0$, пользуясь формулой (91), можно показать, что функция $\wp u$ обладает периодами:

$$2\omega_2 = \frac{2K}{\sqrt{H}} \quad \text{и} \quad 2\omega_2' = \frac{2iK'}{\sqrt{H}},$$

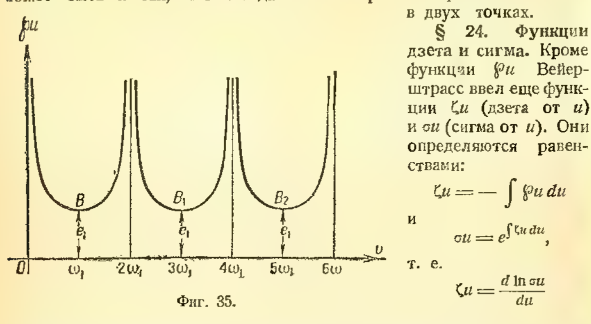
где H имеет прежнее значение.

Разложение функции $\wp u$ в ряд по степеням u имеет вид

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{4 \cdot 5} u^2 + \frac{g_3}{4 \cdot 7} u^4 + \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2} u^6 + \frac{3 g_2 g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} u^8 + \dots$$

График функции $\wp u$ для вещественных значений аргумента u показан на фиг. 35. При $\Delta > 0$ корень $e_1 > 0$, и потому кривая не пересекает оси Ou. При $\Delta < 0$ ход изменения функции $\wp u$ будет тот же, но

вещественный корень e_2 может быть как положительным, так и отрицательным. Следовательно, кривая может не пересекать оси Ou, но может быть и так, что каждая ветвь кривой пересекает ось Ou в двух точках.



Фиг. 35.

§ 24. Функции дзета и сигма. Кроме функции $\wp u$ Вейерштрасс ввел еще функции ζu (дзета от u) и σu (сигма от u). Они определяются равенствами:

$$\zeta u = -\int \wp u \, du$$

и

$$\sigma u = e^{\int \zeta u \, du},$$

т. е.

$$\zeta u = \frac{d \ln \sigma u}{du}$$

Постоянные интегрирования выбраны так. что обе функции — нечетные.

Пусть 2ω есть какой-нибудь из периодов функции $\wp u$. В таком случае

$$\wp(u + 2\omega) = \wp u.$$

Умножая обе части этого равенства на du и затем интегрируя, получим

$$\zeta(u + 2\omega) = \zeta u + 2\eta,$$

где 2η — постоянная интегрирования. Ее нетрудно определить. Полагая $u = -\omega$, будем иметь $\zeta\omega = -\zeta\omega + 2\eta$, т. е. $\eta = \zeta\omega$. Таким образом приходим к соотношению

$$\zeta(u + 2\omega) = \zeta u + \zeta\omega, \tag{93}$$

которым в дальнейшем нам придется воспользоваться.

Интегрируя (93), находим

$$\ln \sigma(u + 2\omega) = \ln \sigma u + 2\eta u + \Gamma,$$

где Γ — постоянная интегрирования.

Переписав полученное равенство в виде

$$\sigma(u + 2\omega) = \Gamma e^{2\eta u} \cdot \sigma u,$$

положим $u = -\omega$. Это дает $\Gamma = e^{-2\eta\omega}$. Следовательно,

$$\sigma(u + 2\omega) = e^{-2\eta(u+\omega)} \cdot \sigma u. \tag{94}$$

Формулы (93) и (94) выражают результат прибавления 2ω к аргументу функций ζu и σu.

Заметим, что функции ζu и σu не принадлежат к эллиптическим функциям.

Исходя из формулы сложения функции $\wp$, можно получить для функции ζu соотношение

$$\zeta(u+v)-\zeta u-\zeta v=\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}, \tag{95}$$

которое можно рассматривать как формулу сложения для функции ζu. В свою очередь из (95) можно для функции σu получить формулу

$$\wp u-\wp v=-\frac{\sigma(u+v)\cdot\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\cdot\sigma^2 v}. \tag{96}$$

Разложения функций ζu и σu в ряд по степеням u имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
\zeta u &= \frac{1}{u}-\frac{g_2}{2^2\cdot 5}\cdot\frac{u^3}{3}-\frac{g_3}{2^2\cdot 7}\cdot\frac{u^5}{5}-\frac{g_2^2}{2^4\cdot 3\cdot 5^2}\cdot\frac{u^7}{7}-\ldots,\\
\sigma u &= u-\frac{g_2 u^5}{2^4\cdot 3\cdot 5}-\frac{g_3 u^7}{2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}-\frac{g_2^2 u^9}{2^9\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}-\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{97}$$

§ 25. Вычисление эллиптических функций. Покажем на нескольких примерах, каким образом вычисляются эллиптические функции.

Пример 1. Вычислить функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$, если $u=0{,}9683$, а модулярный угол $\gamma=15°$.

В таблицах эллиптических интегралов [1]) находим, что если $u=0{,}9683$ и $\gamma=15°$, то амплитуда $\varphi=55°$. Следовательно, на основании формул $\operatorname{sn} u=\sin\varphi$ и $\operatorname{cn} u=\cos\varphi$ имеем:

$$\operatorname{sn} 0{,}9683=\sin 55°=0{,}81915;\quad \operatorname{cn} 0{,}9683=\cos 55°=0{,}5738.$$

Далее имеем:

$$\operatorname{dn} u=\sqrt{1-\sin^2\gamma\cdot\operatorname{sn}^2 u},\quad \log\operatorname{dn} u=\bar{1}{,}99001$$

и

$$\operatorname{dn} u=0{,}9773.$$

Пример 2. Вычислить $\operatorname{sn} 8{,}7614$, если модулярный угол $\gamma=75°$. Наибольший же соответствующий углу $\gamma=75°$ табличный аргумент есть $K=2{,}7681$. Можем поэтому писать [2])

$$\operatorname{sn} 8{,}7614=\operatorname{sn}(4K-2{,}3110)=-\operatorname{sn} 2{,}3110.$$

Обращаясь к таблицам, находим, что при $u=2{,}3110$ и при $\gamma=75°$ амплитуда $\varphi=83°$. Теперь находим

$$\operatorname{sn} 8{,}7614=-\operatorname{sn} 2{,}3110=-\sin 83°=-0{,}9926.$$

[1]) Таблиц эллиптических интегралов на русском языке существует много, отметим три из них:

a) Янке и Эмде, Таблицы специальных функций, ГОНТИ, 1938.

b) Глазенап С. П., Математические и астрономические таблицы, изд. Академии наук, 1932.

c) Сикорский Ю. С., Элементы теории эллиптических функций с их приложениями к механике, ОНТИ, 1935.

[2]) Из § 22 имеем

$$\operatorname{sn}(4K+v)=\operatorname{sn} v \quad\text{и}\quad \operatorname{sn}(-u)=-\operatorname{sn} u.$$

Обозначая $v=-u$, будем иметь

$$\operatorname{sn}(4K-u)=\operatorname{sn}(4K+v)=\operatorname{sn} v=\operatorname{sn}(-u)=-\operatorname{sn} u.$$

Пример 3. Вычислить $\operatorname{sn} 0{,}7$, если модулярный угол $\gamma = 60°$. В таблице находим, что если $\gamma = 60°$, то амплитуде $35°$ соответствует аргумент 0,6409, а амплитуде $40°$ соответствует аргумент 0,7436. Интерполируя, находим $\varphi = 37°52'34''$. Следовательно,

$$\operatorname{sn} 0{,}7 = \sin 37°52'34'' = 0{,}6136.$$

Пример 4. Вычислить $\wp\, 0{,}4536$, если инварианты

$$g_2 = \frac{39}{4} \quad \text{и} \quad g_3 = \frac{35}{8}.$$

Так как дискриминант $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 > 0$, то применяем формулу (90): $\wp u = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2 (u \sqrt{e_1 - e_3})}$. В данном случае корни: $e_1 = \frac{7}{4}$, $e_2 = -\frac{1}{2}$ и $e_3 = -\frac{5}{4}$. Модуль определяется по формуле

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{1}{4} = \sin^2 \gamma; \ \gamma = 30°.$$

Разность корней $e_1 - e_3 = 3$. Вследствие этого $\wp\, 0{,}4536 = -\frac{5}{4} + \frac{3}{\operatorname{sn}^2 (0{,}4536 \sqrt{3})}$. Заметив, что $0{,}4536 \sqrt{3} = 0{,}7856$, обращаемся к таблицам. Пользуясь ими, находим, что амплитуде $43°$ соответствует аргумент 0,7671, а амплитуде $44°$ соответствует аргумент 0,7857. Составляем пропорцию:

$$\frac{\varphi - 43°}{44° - 43°} = \frac{0{,}7856 - 0{,}7671}{0{,}7857 - 0{,}7671}; \quad \varphi = 43°59'45''.$$

Следовательно,

$$\wp\, 0{,}4536 = -\frac{5}{4} + \frac{3}{\sin^2 43°59'45''}.$$

Произведя вычисления, получим

$$\wp\, 0{,}4536 = 4{,}9679.$$

Пример 5. Вычислить $\wp\, 0{,}1345$, если $g_2 = -24$, $g_3 = -28$. Здесь $\Delta < 0$. Корни: $e_1 = \frac{1 + 3i\sqrt{3}}{2}$, $e_2 = -1$ и $e_3 = \frac{1 - 3i\sqrt{3}}{2}$. Пользуемся формулой (91)

$$\wp u = e_2 + H \frac{1 + \operatorname{cn} (2u \sqrt{H})}{1 - \operatorname{cn} (2u \sqrt{H})}.$$

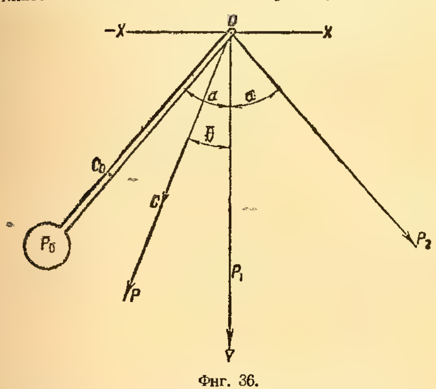
В данном случае: $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $H = \sqrt{9m^2 + n^2} = 3$. Квадрат модуля $k^2 = \frac{1}{2} - \frac{3e_2}{4H} = \frac{3}{4}$, $\sin^2 \gamma = \frac{3}{4}$; $\gamma = 60°$. Вычисляем $\operatorname{cn} (2u \sqrt{H})$. Имеем $\operatorname{cn} (2u \sqrt{H}) = \operatorname{cn} 0{,}4659$. Но, согласно таблице, аргумент 0,4659 соответствует, при $\gamma = 60°$, амплитуде $26°$. Следовательно, $\operatorname{cn} (2u \sqrt{H}) = \cos 26°$. Поэтому

$$\wp\, 0{,}1345 = e_2 + H \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} = -1 + 3 \operatorname{ctg}^2 13°.$$

Произведя вычисления, найдем $\wp\, 0{,}1345 = 55{,}258$.

37. Диференциальное уравнение колебаний маятника. Представим себе, что физический маятник совершает колебания около горизонтальной оси, которая проходит через точку O (фиг. 36). Примем эту точку за начало координат, ось OX направим горизонтально, а OY — вертикально вниз.

Обозначим: начальный угол YOP_0 отклонения маятника буквой α; угол YOP — буквой θ; массу маятника — буквой m; расстояние от центра тяжести C маятника до точки привеса, т. е. OC, — буквой h.



Фиг. 36.

Тогда момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку C и параллельной оси вращения, равен Mr^2, где r — радиус инерции относительно первой оси, а момент инерции относительно оси вращения

$$I = M(r^2 + h^2).$$

Так как момент силы тяжести относительно оси вращения равен $-Mgh\sin\theta$, то диференциальное уравнение вращения тела около оси 21 напишется так:

$$M(r^2 + h^2)\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgh\sin\theta,$$

или

$$\left(\frac{r^2}{h} + h\right)\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta.$$

При выводе этого уравнения мы пренебрегли сопротивлением среды, в которой совершаются колебания маятника.

Положив $\frac{r^2}{h} + h = l$, получим

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta. \tag{98}$$

7*

Продолжив прямую OC, отложим на ней отрезок $CP = \frac{r^2}{h}$. Найденная таким образом точка P называется центром качания маятника, а длина l — приведенной длиной его. Точка P обладает весьма замечательным свойством.

Представим себе, что маятник снят и подвешен к оси в точке P. Вычислим приведенную длину вновь полученного маятника. Эта длина

$$l_1 = \frac{r^2}{CP} + CP = h + \frac{r^2}{h}, \quad \text{т. е.} \quad l = l_1.$$

Таким образом выходит, что если маятник подвесить за центр качания, то прежняя точка привеса сделается новым центром качания.

Умножим левую часть уравнения (98) на $\frac{d\theta}{dt} \cdot dt$, а правую — на $d\theta$. Заметив, что $\frac{d^2\theta}{dt^2} dt = d\frac{d\theta}{dt}$, мы сможем уравнение (98) переписать в виде

$$l\frac{d\theta}{dt} d\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = -g \sin\theta \, d\theta.$$

Интегрируя, найдем

$$l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g\cos\theta + \Gamma,$$

где Γ — произвольная постоянная. Заметив, что угловая скорость $\frac{d\theta}{dt} = 0$, когда угол $\theta = \pm\alpha$, будем иметь

$$0 = 2g\cos\alpha + \Gamma,$$

откуда

$$l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g(\cos\theta - \cos\alpha)$$

и

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4n^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

где положено $g : l = n^2$. Извлекая квадратный корень, получим

$$\frac{d\theta}{dt} = 2n\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}. \tag{99}$$

Здесь мы выбрали знак плюс перед корнем из следующих соображений: считаем, что $\theta < 0$, если OP лежит в угле P_0OP_1, и $\theta > 0$, если OP лежит в угле P_0OP_2. Отсюда следует, что при переходе маятника из положения OP_0 в положение OP_2 θ возрастает и, следовательно, $d\theta/dt > 0$. За начальный момент выберем момент перехода маятника через положение равновесия. Тогда, отделяя в (99) переменные и интегрируя, найдем

$$nt = \int_0^\theta \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Преобразуем под знаком интеграла переменную, полагая

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\varphi,$$

тогда

$$d\,\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Когда θ меняется от нуля до θ, то φ меняется в пределах от нуля до φ. Следовательно,

$$t=\frac{1}{n}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

где $k=\sin\frac{\alpha}{2}$. Отметим, что модулярный угол этого интеграла $\gamma=\frac{\alpha}{2}$.

Обращая же последний интеграл, найдем

$$\varphi=\operatorname{am}(nt)=\operatorname{am}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Как это видно из равенства (99), угловая скорость $\frac{d\theta}{dt}$ станет равной нулю, когда маятник займет положение OP_2, симметричное с положением OP_0 относительно оси OY. Время колебания маятника при переходе от положения OP_0 в положение OP_2:

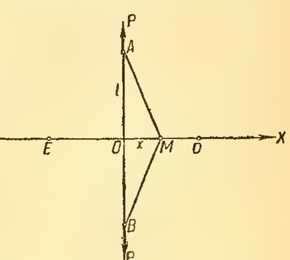
$$T=\frac{2}{n}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

При малом угле α, откидывая член $k^2\sin^2\varphi$, получим известную формулу

$$T=\frac{\pi}{n}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Пользуясь таблицами эллиптических интегралов, нетрудно вычислить время колебания маятника при каком угодно начальном угле отклонения α. Например, если $\alpha=60°$, то $\gamma=30°$, и

$$T=\frac{2}{n}\cdot 1{,}6858=3{,}3716\sqrt{\frac{l}{g}},$$



Фиг. 37.

38. *Псевдогармонические колебания.* Представим себе упругую проволоку, натянутую силами P между точками A и B (фиг. 37), и массу m, прикрепленную в средней точке O проволоки, длину которой AB обозначим через $2l$. Примем точку O за начало координат и направим ось OX перпендикулярно AB. Пусть в начальный момент $t=0$ масса m была некоторой силой выведена из положения O и заняла положе-

ние D, причем $OD=a$ есть величина, по сравнению с l, малая. В точке D масса m была предоставлена самой себе (без начального толчка). Это значит, что начальная скорость движения массы m равна нулю, т. е.

$$x_0=a \quad \text{и} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0=0 \quad \text{при} \quad t=0.$$

Пусть M есть какое-нибудь положение массы m. Пусть ε есть относительное удлинение проволоки AM. Мы видим, что

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{l^2+x^2}-l}{l}=\frac{x^2}{l(\sqrt{l^2+x^2}+l)}.$$

Пренебрегая малой, по сравнению с l^2, величиной x^2, получим

$$\varepsilon=\frac{x^2}{2l^2}.$$

Пусть F обозначает площадь поперечного сечения проволоки и E — модуль Юнга материала ее. Тогда в каждой из частей MA и MB проволоки действуют натяжения

$$P+\frac{EFx^2}{2l^2}.$$

Сумма проекций этих натяжений на ось OX равна

$$\left(P+\frac{EFx^2}{2l^2}\right)\frac{2x}{\sqrt{l^2+x^2}}=\frac{2Px}{l}+\frac{EFx^3}{l^3}.$$

Здесь мы опять пренебрегли малыми величинами порядка выше $(x/l)^3$.

Диференциальное уравнение движения массы m будет

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{2Px}{l}-\frac{EFx^3}{l^3}. \tag{100}$$

Движение, совершаемое массой m, согласно этому диференциальному уравнению принадлежит к числу так называемых псевдогармонических колебаний. Вообще под этим названием известны такие колебания, в которых „гибкость“ системы зависит от перемещения (см. Тимошенко, „Теория колебаний в инженерном деле“, стр. 73). Если член $\frac{EFx^3}{l^3}$ настолько мал, что им можно пренебречь, то, откидывая его, мы приходим к случаю гармонического колебания. Чтобы проинтегрировать уравнение (100), умножим левую его часть на $\frac{dx}{dt}dt$, а правую — на dx. Первый интеграл представится в виде

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=-\frac{Px^2}{l}-\frac{EFx^4}{4l^3}+C.$$

Принимая во внимание начальные условия, имеем

$$C=\frac{Pa^2}{l}+\frac{EFa^4}{4l^3},$$

поэтому

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=(a^2-x^2)\left(\frac{2P}{lm}+\frac{EFa^2}{2ml^3}+\frac{EFx^2}{2ml^3}\right).$$

Положим

$$x=a\xi \quad \text{и} \quad \frac{EFa^2}{4Pl^2+EFa^2}=\lambda^2.$$

Будем иметь

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = \frac{4Pl^2 + EFa^2}{2ml^3}(1-\xi^2)(1+\lambda^2\xi^2),$$

или

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = b^2(1-\xi^2)(1+\lambda^2\xi^2), \quad \text{где} \quad b^2 = \frac{4Pl^2 + EFa^2}{2ml^3}.$$

Отсюда

$$\frac{d\xi}{dt} = -b\sqrt{(1-\xi^2)(1+\lambda^2\xi^2)}.$$

Перед корнем взят знак минус, так как ξ есть убывающая функция от t. Полагая $\xi = \cos\varphi$, получим

$$b\,dt = \frac{\sqrt{1-k^2}\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

где

$k^2 = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} = \frac{EFa^2}{4Pl^2 + 2EFa^2} < 1$. При $t = 0$ имеем $\xi = 1$ и $\varphi = 0$.

Поэтому

$$bt = \sqrt{1-k^2}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

следовательно,

$$\varphi = \operatorname{am}\frac{bt}{\sqrt{1-k^2}}, \quad \cos\varphi = \operatorname{cn}\frac{bt}{\sqrt{1-k^2}},$$

и уравнение движения

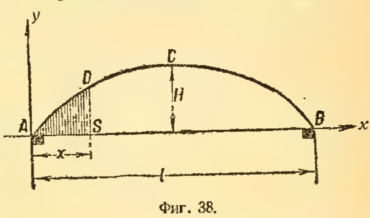
$$x = a\operatorname{cn}\frac{bt}{\sqrt{1-k^2}}.$$

В начале координат $\xi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Если под периодом колебаний понимать время, в течение которого масса m из положения D перейдет в E ($OE = a$) и вернется обратно в D, то период колебаний

$$T = \frac{4\sqrt{1-k^2}}{b}\,\mathrm{K},$$

где

$$\mathrm{K} = \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$



Фиг. 38.

39. Изгиб брусьев равного сопротивления; прямоугольное сечение. Предположим, что на лежащий на двух опорах брус действует нагрузка, меняющаяся по закону параболы ACB (фиг. 38). Если выбрать оси координат, как показано на чертеже, то уравнение этой параболы будет

$$y = \frac{4H}{l^2}(lx - x^2).$$

Здесь H — высота параболического сегмента, а l — длина бруса.

Если q есть нагрузка, соответствующая 1 *см*² площади ACB, то вся нагрузка

$$Q=\frac{2}{3}Hlq;$$

реакции опор

$$A=B=\frac{1}{2}Q.$$

Будем теперь через y обозначать прогиб бруса под действием указанной нагрузки.

Граничные условия здесь таковы:

$$1)\ y=0 \text{ при } x=0; \qquad 2)\ y=0 \text{ при } x=l.$$

Предположим, что брус представляет собой балку равного сопротивления на изгиб, имеющую постоянную ширину прямоугольного поперечного сечения равную b и переменную высоту h. Пусть P — площадь ASD, а z — плечо, относительно сечения S, нагрузки, соответствующей площади P; тогда

$$P=\frac{2H}{3l^2}(3lx^2-2x^3), \quad z=x-z_1,$$

где x — абсцисса сечения S, а z_1 — абсцисса центра тяжести площади ASD. Но, как нетрудно видеть,

$$z_1=\frac{4lx-3x^2}{2(3l-2x)} \quad \text{и} \quad z=\frac{2lx-x^2}{2(3l-2x)}.$$

Вследствие этого изгибающий момент в сечении S

$$M=-Pqz+Ax=\frac{Hq}{3l^2}(x^4-2lx^3+l^3x).$$

Пусть R — напряжение в любом сечении бруса ($R=\text{const}$) и $W=\frac{bh^2}{6}$ — момент сопротивления этого сечения; расчетная формула $\frac{M}{W}=R$ дает $h=\sqrt{\frac{2Hq}{Rbl^2}}\cdot\sqrt{x^4-2lx^3+l^3x}$.

Предполагая изгиб малым, будем пользоваться приближенным диференциальным уравнением упругой линии

$$EIy''=M,$$

где E — модуль Юнга для материала, из которого сделан брус, а $I=\frac{bh^3}{12}$ — момент инерции поперечного сечения.

Диференциальное уравнение представим в виде

$$y''=\frac{T}{\sqrt{x^4-2lx^3+l^3x}}, \tag{101}$$

где $T=\frac{2Rl}{E}\sqrt{\frac{Rb}{2Hq}}$. Полагая $x=\frac{l}{2}(1+\xi)$, уравнению (101) можно придать вид

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}=\frac{T}{\sqrt{5}\sqrt{(1-\xi^2)\left(1-\frac{1}{5}\xi^2\right)}}.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{T}{\sqrt{5}} \int\limits_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)\left(1-\frac{1}{5}\xi^2\right)}} + C. \tag{102}$$

Примем за аргумент интеграл

$$u = \int\limits_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)\left(1-\frac{1}{5}\xi^2\right)}}, \tag{103}$$

квадрат модуля которого $k^2 = \frac{1}{5}$. Положив $k = \sin\gamma$, будем иметь $\gamma \approx 26°34'$. Обращая (103), находим

$$\xi = \operatorname{sn} u, \quad \sqrt{1-\xi^2} = \operatorname{cn} u \quad \text{и} \sqrt{1-\frac{1}{5}\xi^2} = \operatorname{dn} u.$$

Вследствие этого (102) дает

$$dy = \frac{Tu}{\sqrt{5}}\, d \operatorname{sn} u + C d \operatorname{sn} u,$$

откуда

$$y = \frac{T}{\sqrt{5}}\left(u \operatorname{sn} u - \int \operatorname{sn} u\, du\right) + C \operatorname{sn} u + C_1.$$

Принимая во внимание, что

$$\int \operatorname{sn} u\, du = -\frac{1}{k} \ln(\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u),$$

находим

$$y = \frac{Tu \operatorname{sn} u}{\sqrt{5}} + T \ln(\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u) + C \operatorname{sn} u + C_1. \tag{104}$$

Произвольные постоянные C и C_1 определим, подчиняя равенство (104) граничным условиям. Предварительно, однако, заметим, что $\xi = -1$ и $u = -K$ при $x = 0$ и $\xi = 1$ и $u = K$ при $x = l$. Здесь через K обозначен полный эллиптический интеграл первого рода, модуль которого равен $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Приняв во внимание, что $\operatorname{sn} K = 1$, $\operatorname{cn} K = 0$ и $\operatorname{dn} K = \frac{2}{\sqrt{5}}$, находим

$$C = 0 \quad \text{и} \quad C_1 = -\frac{TK}{\sqrt{5}} - T \log \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Вследствие этого имеем

$$y = T\left[\frac{u \operatorname{sn} u - K}{\sqrt{5}} + \ln\left(\frac{\sqrt{5} \operatorname{dn} u + \operatorname{cn} u}{2}\right)\right].$$

В то же время $x = \frac{l}{2}(1 + \operatorname{sn} u)$. Два последних равенства представляют параметрическое уравнение изогнутой оси бруса.

Стрелу прогиба f получим при $x=\frac{l}{2}$, т. е. при $\xi=0$ и $u=0$; тогда получим

$$f=T\left(\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}-\frac{K}{\sqrt{5}}\right)$$

или, находя значение K в таблицах эллиптических интегралов,

$$f=-0{,}261T.$$

Если, например, $l=200$ *см*, $H=50$ *см*, $b=20$ *см*, $E=100\,000$ *кг/см*^{2}, $q=2$ *кг/см*^{2}, $R=200$ *кг/см*^{2}, то $f=-0{,}93$ *см*.

40. Изгиб бруса равного сопротивления; круглое сечение. Предположим, что брус круглого поперечного сечения, лежащий на двух опорах, подвергается действию равномерно распределенной нагрузки, интенсивности q *кг/см*^{2}. Поперечные размеры бруса подобраны так, что нормальное напряжение равно допускаемому.

Граничные условия, очевидно, таковы:

1) при $x=0$ ордината $y=0$; 2) при $x=l$ также $y=0$.

Здесь l — длина бруса.

Пусть r есть радиус его поперечного сечения, удаленного на расстояние x от левой опоры. Изгибающий момент для этого сечения будет

$$M=\frac{q}{2}(lx-x^2).$$

Момент сопротивления $W=\frac{\pi r^3}{4}$.

Если R обозначает допускаемое напряжение, то уравнение

$$\frac{M}{W}=R$$

дает

$$r=\sqrt[3]{\frac{2q}{\pi R}}\cdot\sqrt[3]{lx-x^2}.$$

Вследствие этого момент инерции

$$I=\frac{1}{4}\pi r^4=\frac{q}{2R}\cdot\sqrt[3]{\frac{2q}{\pi R}}\ \sqrt[3]{(lx-x^2)^4}.$$

Диференциальное уравнение упругой линии будет

$$y''=\frac{T}{\sqrt[3]{lx-x^2}},$$

где $T=\frac{R}{E}\sqrt[3]{\frac{\pi R}{2q}}$. Полагаем $x-\frac{l}{2}=\frac{lt}{2}$, представим уравнение в виде

$$\sqrt[3]{\frac{16}{l^4}}\ \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{T}{\sqrt[3]{t^2-1}},$$

откуда

$$\sqrt[3]{\frac{16}{l^4}}\ \frac{dy}{dt}=-T\int\frac{dt}{\sqrt[3]{t^2-1}}+C.$$

Пусть $\sqrt[3]{t^2-1}=z$, т. е. $2t=\mp\sqrt{4z^3+4}$; знак минус соответствует изменению x в интервале от 0 до $l/2$, а плюс — изменению x в интервале от $l/2$ до l. Тогда

$$\frac{dt}{\sqrt[3]{t^2-1}}=\mp\frac{3zdz}{\sqrt{4z^3+4}}.$$

Примем за аргумент интеграл

$$u=\int_z^\infty\frac{dz}{\sqrt{4z^3+4}},$$

обращая который, находим $z=\wp u$, причем инварианты $g_2=0$ и $g_3=-4$. Корни

$$e_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\quad e_2=-1\quad\text{и}\quad e_3=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

При изменении x в интервале $(0, l/2)$ функция $\wp u$ убывает от 0 до -1. При изменении x в интервале $(l/2, l)$ функция $\wp u$ возрастает от -1 до 0. При $x=\frac{l}{2}$ аргумент u становится равным вещественному полупериоду ω_2. Производная $\wp' u=-\sqrt{4z^3+4}$ — в первом интервале и $\wp' u=+\sqrt{4z^3+4}$ — во втором.

Вследствие этого для обоих интервалов

$$\frac{dt}{\sqrt[3]{t^2-1}}=3\wp u du.$$

Следовательно,

$$\sqrt[3]{\frac{16}{l^4}}\,\frac{dy}{dt}=-3T\int\wp u du+C$$

или

$$\sqrt[3]{\frac{16}{l^4}}\cdot\frac{dy}{dt}=3T\zeta u+C.$$

Принимая во внимание, что $dt=3\wp^2 u du$, далее имеем

$$\sqrt[3]{\frac{16}{l^4}}\,y=9T\int\zeta u\wp^2 u du+3C\int\wp^2 u du+C_1.$$

Но при $g_2=0$ имеем $(\wp' u)^2=4\wp^3 u-g_3$, $\wp^2 u=\frac{1}{6}\wp'' u$ и $\int\wp^2 u du=$ $=\frac{1}{6}\wp' u$.

Интегрирование по частям дает

$$\int\zeta u\wp^2 u du=\frac{1}{6}\left[\wp' u\zeta u+\frac{1}{2}\wp^2 u\right].$$

Вследствие этого

$$\sqrt[3]{\frac{16}{l^4}}\,y=\frac{3T}{2}\left[\wp' u\cdot\zeta u+\frac{1}{2}\wp^2 u\right]+\frac{C}{2}\wp' u+C_1. \qquad (105)$$

Произвольные постоянные C и C_1 определятся на основании граничных условий. Пусть u_0 есть то значение аргумента u, при котором $\wp u=0$. В таком случае $\wp' u_0=-2$, $\wp'(2\omega_2-u_0)=2$. Подчиняя (105) граничным условиям и приняв во внимание, что

$$\zeta(2\omega_2-u_0)=2\zeta\omega_2-\zeta u_0,$$

получим

$$3T\zeta u_0 + C - C_1 = 0 \quad \text{и} \quad -3T\zeta u_0 + 6T\zeta\omega_2 + C + C_1 = 0.$$

Определив отсюда C и C_1 и внеся их значения в (105), имеем

$$\sqrt[3]{\frac{16}{l^4}}\, y = \frac{3T}{2}\left[\wp' u(\zeta u - \zeta\omega_2) + 2(\zeta u_0 - \zeta\omega_2) + \frac{1}{2}\wp^2 u\right].$$

Кроме того,

$$x = \frac{l}{2}(1 + 2\wp' u).$$

Последние два равенства представляют параметрическое уравнение изогнутой оси бруса. Прогиб f получим, полагая в выражении ординаты $u = \omega_2$. Приняв во внимание, что $\wp'\omega_2 = 0$ и $\wp\omega_2 = -1$, будем иметь

$$f = \frac{3Tl}{2}\sqrt[3]{\frac{l}{2}}\left(\frac{1}{4} + \zeta u_0 - \zeta\omega_2\right).$$

В формуле

$$\zeta(u+v) = \zeta u + \zeta v + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}$$

положим $u = u_0$ и $v = -\omega_2$; получим

$$\zeta u_0 - \zeta\omega_2 = 1 + \zeta(u_0 - \omega_2),$$

откуда

$$f = \frac{3Tl}{2}\sqrt[3]{\frac{l}{2}}\left[\frac{5}{4} - \zeta(\omega_2 - u_0)\right].$$

Для числового примера примем

$$l = 200 \text{ см}, \quad E = 2\,000\,000 \text{ кг/см}^2, \quad q = 20 \text{ кг/см}^2, \; R = 1000 \text{ кг/см}^2.$$

Вычисляем ω_2. Так как $e_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, то $m = \frac{1}{2}$ и $n = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Следовательно, $H = \sqrt{9m^2 + n^2} = \sqrt{3}$. Модулярный угол определяем из уравнения

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{3e_2}{4H}, \quad \text{т. е. } \sin^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}: \theta = 75^\circ.$$

Но, согласно таблицам, при $\theta = 75^\circ$ полный эллиптический интеграл $K = 2{,}76806$; значит $\omega_2 = \frac{K}{\sqrt{H}} = 2{,}1033$. Вычисляем u_0. Пользуясь формулой (91), при $\wp u_0 = 0$ имеем $\operatorname{cn}(2u_0\sqrt{H}) = \frac{e_2 + H}{e_2 - H} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = -\operatorname{tg} 15^\circ$. Отсюда $\operatorname{cn}(2K - 2u_0\sqrt{H}) = \operatorname{tg} 15^\circ$. Пользуясь таблицами и интерполируя, находим, что $2K - 2u_0\sqrt{H} = 1{,}84557$; $u_0 = 1{,}4021$ и $\omega_2 - u_0 = 0{,}7012$. При помощи (97) находим $\zeta(\omega_2 - u_0) = 1{,}4361$. Поэтому $f = -0{,}56$ *см.*

§ 26. Интегрирование уравнений посредством степенных рядов. Интегрирование диференциальных уравнений посредством степенных рядов может быть выполнено либо путем разложения неизвестной функции в ряд Тэйлора-Маклорена, либо путем разложения ее в обобщенный степенной ряд с неопределенными показателями и коэфициентами. Благодаря чрезвычайной общности прием этот весьма ценен как в теоретическом, так и в практическом отношении. Если им пользоваться с надлежащей осмотрительностью, следя за сходимостью получаемых рядов, то он может дать хорошие результаты. Заметим только, что, интегрируя уравнение посредством ряда, мы тем самым предполагаем, что искомая функция с п о с о б н а разлагаться в степенной ряд.

Пусть дано диференциальное уравнение

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (106)$$

и известно, что когда аргумент $x = a$, то

$$y_0 = B; \quad y_0' = B_1, \quad y_0'' = B_2, \quad \ldots, \quad y_0^{(n-1)} = B_{n-1},$$

т. е. известны значения как самой функции, так и ее производных, начиная с первой и кончая производной порядка $(n-1)$. Решая уравнение (106) относительно $y^{(n)}$, будем иметь

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (107)$$

Диференцирование (107) по x дает

$$y^{(n+1)} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}.$$

Если заменим здесь $y^{(n)}$ ее значением из (107), то увидим, что производная $y^{(n+1)}$ зависит только от $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, т. е.

$$y^{(n+1)} = F_1(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (108)$$

Диференцирование (108) дает

$$y^{(n+2)} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} y' + \frac{\partial F_1}{\partial y'} y'' + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}.$$

Если и здесь заменим $y^{(n)}$ ее значением (107), то увидим, что и производная $y^{(n+2)}$ зависит только от $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, т. е.

$$y^{(n+2)} = F_2(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (109)$$

Повторяя ту же операцию, мы увидим, что и все дальнейшие производные являются функциями только от $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, т. е.

$$y^{(n+3)} = F_3(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$
$$y^{(n+4)} = F_4(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

и т. д.

Если в равенствах (107), (108), (109) и т. д. заменим $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ их частными значениями $a, B, B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$, то получим:

$$\left.\begin{aligned} y_0^{(n)} &= F(a, B, B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}), \\ y_0^{(n+1)} &= F_1(a, B, B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}), \\ y_0^{(n+2)} &= F_2(a, B, B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}) \end{aligned}\right\} \qquad (110)$$

и т. д.

Теперь применим к искомой функции формулу Тэйлора:

$$y = y_0 + y_0'(x-a) + y_0'' \frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + y_0^{(n-1)} \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \\ + y_0^{(n)} \frac{(x-a)^n}{n!} + \ldots$$

и заменим $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ их значениями $B, B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{n-1}$, а $y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}, y_0^{(n+2)}, \ldots$ их значениями из (110). Мы найдем выражение искомой функции

$$y = B + B_1(x-a) + B_2\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + B_{n-1}\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + F(a, B, B_1, B_2, \ldots, B_{n-1})\frac{(x-a)^n}{n!} + F_1(a, B, B_1, \ldots, B_{n-1})\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots \quad (111)$$

в виде степенного ряда со вполне определенными коэфициентами. Если ряд этот сходится, то он может служить для вычисления значений y. Надо, однако, заметить, что выполнение вычислений на практике обыкновенно весьма утомительно, в особенности при сложном виде функции $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$. В этих случаях приходится пользоваться другими методами. Некоторые из них рассмотрены ниже (см. главу о приближенном интегрировании).

Мы считали величины $B, B_1, \ldots$ заданными. В этом случае (111) представляет частный интеграл уравнения (106). Но эти величины можно рассматривать и как произвольные постоянные. В таком случае (111) представит общий интеграл уравнения. В частном случае, когда $a=0$, получим неизвестную функцию разложенной в ряд Маклорена.

В виде примера проинтегрируем уже рассмотренное в *18* уравнение гармонического колебательного движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0 \quad (112)$$

посредством разложения неизвестной функции x в ряд Маклорена. Положим, что в момент $t=0$ функция $x_0 = a$ и производная ее $\frac{dx}{dt} = \alpha$.

Диференцируя последовательно уравнение (112), будем иметь:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -k^2\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^4x}{dt^4} = -k^2\frac{d^2x}{dt^2} = k^4x, \quad \frac{d^5x}{dt^5} = k^4\frac{dx}{dt},$$
$$\frac{d^6x}{dt^6} = k^4\frac{d^2x}{dt^2} = -k^6x, \quad \ldots \quad (112a)$$

Заменим в уравнениях (112) и (112a) x и $\frac{dx}{dt}$ их начальными значениями $x_0 = a$ и $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \alpha$. Это дает:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 = -k^2a, \quad \left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_0 = -k^2\alpha, \quad \left(\frac{d^4x}{dt^4}\right)_0 = k^4a, \quad \left(\frac{d^5x}{dt^5}\right)_0 = k^4\alpha,$$
$$\left(\frac{d^6x}{dt^6}\right)_0 = -k^6a, \quad \ldots;$$

записывая разложение неизвестной функции x в виде ряда Маклорена, находим

$$x = x_0 + \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 t + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 \frac{t^2}{2!} + \left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_0 \frac{t^3}{3!} + \left(\frac{d^4x}{dt^4}\right)_0 \frac{t^4}{4!} + \ldots,$$

а после замены $x_0, \left(\frac{dx}{dt}\right)_0, \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0, \left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_0, \ldots$ их значениями

$$x = a\left[1 - \frac{(kt)^2}{2!} + \frac{(kt)^4}{4!} - \ldots\right] + \frac{\alpha}{k}\left[kt - \frac{(kt)^3}{3!} + \frac{(kt)^5}{5!} - \ldots\right],$$

т. е.

$$x = a \cos kt + \frac{\alpha}{k} \sin kt.$$

Мы иным путем пришли к полученному раньше результату.

Так как первый из обнаруженных при решении рядов выражает $\cos kt$, а второй $\sin kt$, то интеграл удалось написать в замкнутой форме и необходимость в исследовании сходимости рядов отпала. Это случай весьма редкий. Вообще же получаемые ряды приходится исследовать при помощи известных из анализа признаков сходимости.

§ 27. Гамма-функции. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx,$$

в котором показатель $n > 0$. Этот интеграл обозначим через $\Gamma(n)$ и назовем гамма-функцией от n.

Открытая Эйлером гамма-функция имеет широкие применения в самых разнообразных частях математического анализа; мы здесь вкратце изложим ее наиболее важные свойства.

Основное свойство гамма-функции состоит в том, что

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n). \tag{113}$$

Действительно, интегрируя по частям, будем иметь

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^n dx = \Big[-e^{-x} x^n\Big]_0^\infty + n \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx.$$

Но для $n > 0$ функция $e^{-x} x^n$ равна нулю как при $x = 0$, так и при $x = \infty$. Следовательно,

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$$

Заменяя в (113) параметр n последовательно на $n-1$, $n-2$, $n-3, \ldots, n-k$, где k есть число целое, мы получим ряд равенств:

$$\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1),$$

$$\Gamma(n-1) = (n-2)\,\Gamma(n-2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Gamma(n-k+1) = (n-k)\,\Gamma(n-k).$$

Отсюда

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots(n-k)\,\Gamma(n-k).$$

Заменяя же n на $n+k$, находим

$$\Gamma(n+k) = (n+k-1)(n+k-2)\ldots n\Gamma(n). \tag{114}$$

Отсюда видно, что, составив таблицу значений функций $\Gamma(n)$ для значений параметра n, заключенных между 0 и 1, мы, пользуясь формулой (114), сможем вычислить значения этой функции для любого, большего единицы, значения параметра.

Например,

$$\Gamma\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

При n целом

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1).$$

Но $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1$. Следовательно,

$$\Gamma(n)=1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)=(n-1)!$$

При $n=\frac{1}{2}$ будем иметь $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-x}x^{-1/2}dx$. Положим $x=z^2$; тогда $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-z^2}dz$.

Но, как известно,

$$\int_0^\infty e^{-z^2}dz=\frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

следовательно,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Значит, при целом n

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Мы определили функцию $\Gamma(n)$ для $n>0$. Но понятие о функции $\Gamma(n)$ распространяется и на отрицательные значения параметра n. Если $-1<n<0$, то функцией $\Gamma(n)$ называют выражение

$$\frac{\Gamma(n+1)}{n}.$$

Точно так же, если $-k<n<-k+1$, то полагаем

$$\Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+k)}{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)n},$$

что согласно с формулой (114).

Например,

$$\Gamma\left(-\frac{9}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(-\frac{9}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)},$$

т. е.

$$\Gamma\left(-\frac{9}{4}\right)=-\frac{64}{45}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).$$

Весьма важно заметить, что при $n=0;\ -1;\ -2;\ldots$ функция $\Gamma(n)$ обращается в бесконечность.

Известно из алгебры, сколь важное значение имеет разложение целого многочлена на множители. Мысль о разложении на множители естественно распространить и на другие рассматриваемые в анализе функции. Разница будет состоять в том, что в то время когда при разложении на множители целого многочлена число множителей получается конечным, при разложении других функций оно получается бесконечным.

Принимая во внимание, что разложение на множители является для функции весьма характерным, мы представим функцию $\Gamma(n)$ в виде бесконечного произведения.

Прежде всего заметим, что

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx = \lim_{m\to\infty} \int_0^m e^{-x} x^{n-1} dx.$$

Но, как известно,

$$e^{-x} = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m.$$

Заменяя под знаком интеграла функцию e^{-x} ее значением (строгое доказательство возможности такой замены можно найти, например, в книге Р. О. Кузьмина „Бесселевы функции"), будем иметь

$$\Gamma(n) = \lim_{m\to\infty} \int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{n-1} dx.$$

Интегрирование по частям дает

$$\int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{n-1} dx = \left[\frac{x^n}{n}\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m\right]_0^m + \frac{m}{nm} \int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^{m-1} x^n dx =$$

$$= \frac{m}{nm} \int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^{m-1} x^n dx.$$

Повторяя операцию интегрирования по частям m раз, приходим к равенствам:

$$\int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{n-1} dx = \frac{m}{nm} \int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^{m-1} x^n dx =$$

$$= \frac{m(m-1)}{n(n+1)m^2} \int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^{m-2} x^{n+1} dx = \ldots =$$

$$= \frac{m(m-1)\ldots 2\cdot 1}{n(n+1)\ldots(n+m-1)} \cdot \frac{1}{m^m} \int_0^m x^{n+m-1} dx = \frac{m(m-1)\ldots 2\cdot 1}{n(n+1)\ldots(n+m)} \cdot \frac{m^{n+m}}{m^m}.$$

Следовательно,

$$\Gamma(n) = \lim_{m\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}{n(n+1)\ldots(n+m)} \cdot m^n.$$

Полученное равенство представляет выражение функции $\Gamma(n)$ в виде бесконечного произведения.

§ 28. Уравнение Бесселя; функции Бесселя. Многие вопросы математической физики и механики приводят к уравнению

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0, \qquad (115)$$

известному под названием уравнения Бесселя. Аргумент x может принимать в нем не только вещественные, но и мнимые значения. Параметром n может быть любое заданное число.

Решение уравнения Бесселя будем искать в виде бесконечного ряда

$$y = a_0 x^p + a_1 x^{p+1} + a_2 x^{p+2} + a_3 x^{p+3} + \dots$$

Составив производные y' и y'' и подставив их значения и значение y в (115), получим

$$(p^2 - n^2) a_0 x^p + [(p+1)^2 - n^2] a_1 x^{p+1} + \{[(p+2)^2 - n^2] a_2 + a_0\} x^{p+2} +$$
$$+ \{[(p+3)^2 - n^2] a_3 + a_1\} x^{p+3} + \{[(p+4)^2 - n^2] a_4 + a_2\} x^{p+4} + \dots = 0.$$

Так как это равенство есть тождество, то должно быть:

$$(p^2 - n^2) a_0 = 0, \quad [(p+1)^2 - n^2] a_1 = 0, \quad [(p+2)^2 - n^2] a_2 + a_0 = 0,$$
$$[(p+3)^2 - n^2] a_3 + a_1 = 0 \text{ и т. д.}$$

Из этих уравнений следует, что $p = n$ или $p = -n$ и что $a_1 = 0$. Вследствие этого $a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0$ и, далее,

$$a_2 = \frac{-a_0}{(p+2)^2 - n^2}, \quad a_4 = \frac{a_0}{[(p+2)^2 - n^2][(p+4)^2 - n^2]},$$
$$a_6 = \frac{a_0}{[(p+2)^2 - n^2][(p+4)^2 - n^2][(p+6)^2 - n^2]} \text{ и т. д.}$$

Полагая в этих выражениях $p = n$, находим:

$$a_2 = \frac{-a_0}{2^2 \cdot (n+1)}, \quad a_4 = \frac{a_0}{1 \cdot 2 \cdot 2^4 \cdot (n+1)(n+2)},$$
$$a_6 = \frac{-a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^6 \cdot (n+1)(n+2)(n+3)} \text{ и т. д.}$$

Зная значения этих коэфициентов в выражении y, имеем

$$y_1 = a_0 x^n \left[1 - \frac{(x/2)^2}{1 \cdot (n+1)} + \frac{(x/2)^4}{1 \cdot 2 \cdot (n+1)(n+2)} - \right.$$
$$\left. - \frac{(x/2)^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n+1)(n+2)(n+3)} + \dots\right]. \quad (116)$$

Теперь положим $p = -n$; тогда получим

$$y_2 = a_0 x^{-n} \left[1 - \frac{(x/2)^2}{1 \cdot (-n+1)} + \frac{(x/2)^4}{1 \cdot 2 \cdot (-n+1)(-n+2)} - \right.$$
$$\left. - \frac{(x/2)^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-n+1)(-n+2)(-n+3)} + \dots\right]. \quad (117)$$

Выражения y_1 и y_2 представляют собой частные решения уравнения (115). Коэфициент a_0 в том и другом является произвольной постоянной.

Обыкновенно коэфициенту a_0 придают определенное значение, связанное с эйлеровой функцией $\Gamma(n)$. А именно, полагают в выражении y_1

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)},$$

а в выражении y_2

$$a_0 = \frac{1}{2^{-n} \Gamma(-n+1)}.$$

В таком случае, заменяя обозначение y_1 на I_n, а y_2 — на I_{-n}, получим

$$I_n = \frac{(x/2)^n}{\Gamma(n+1)}\left[1 - \frac{(x/2)^2}{1\cdot(n+1)} + \frac{(x/2)^4}{1\cdot 2\cdot(n+1)(n+2)} - \dots\right]$$

и

$$I_{-n} = \frac{(x/2)^{-n}}{\Gamma(-n+1)}\left[1 - \frac{(x/2)^2}{1\cdot(-n+1)} + \frac{(x/2)^4}{1\cdot 2\cdot(-n+1)(-n+2)} - \dots\right],$$

или короче

$$I_n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(x/2)^{n+2k}}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)} \tag{118}$$

и

$$I_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(x/2)^{-n+2k}}{\Gamma(-n+k+1)\Gamma(k+1)}. \tag{119}$$

Полученные ряды сходятся при всех конечных значениях x. Функцию I называют **бесселевой функцией первого рода и n-го порядка**.

При нецелых значениях n функции I_n и I_{-n} представляют два независимых частных решения уравнения (115), общий интеграл которого

$$y = C_1 I_n + C_2 I_{-n}, \tag{120}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. При целых значениях параметра n решения I_n и I_{-n} перестают быть независимыми. Действительно, в этом случае функция $\Gamma(-n+k+1)$ для всех значений k от 0 до ∞ обращается в бесконечность (см. предыдущий параграф). Ввиду этого в выражении (119) для I_{-n} первые n членов обращаются в нули, и мы будем иметь

$$I_{-n} = \sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k \frac{(x/2)^{-n+2k}}{\Gamma(-n+k+1)\Gamma(k+1)}.$$

Заменяя здесь k на $n+k$, получим

$$I_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n+k} \frac{(x/2)^{n+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}, \quad \text{т. е.} \quad I_{-n} = (-1)^n I_n.$$

Следовательно, при n целом выражение (120) общим интегралом диференциального уравнения (115) служить не может.

В случае, когда $n=0$, уравнение Бесселя принимает вид

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0 \tag{121}$$

и допускает частное решение

$$I_0 = 1 - (x/2)^2 + \frac{1}{(2!)^2}(x/2)^4 - \frac{1}{(3!)^2}(x/2)^6 + \dots$$

Здесь мы имеем функцию Бесселя первого рода и нулевого порядка.

Второе частное решение уравнения (121) будем искать в виде

$$y = aI_0(x)\ln x + a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots \qquad (122)$$

Образуя производные y' и y'', вносим их значения в уравнение (121), принимая во внимание, что

$$I_0'' + \frac{1}{x}I_0' + I_0 = 0$$

и что

$$I_0' = -\frac{2x}{2^2} + \frac{4x^3}{2!^2\cdot 2^4} - \frac{6x^5}{3!^2\cdot 2^6} + \ldots$$

Если затем коэфициенты полученного тождества приравняем нулю, то для определения величин a, a_2, a_4, a_6, ... получим уравнения:

$$-a + 2^2a_2 + a_0 = 0,$$

$$\frac{2a\cdot 4}{2!^2\cdot 2^4} + 4^2a_4 + a_2 = 0,$$

$$\frac{2a\cdot 6}{3!^2\cdot 2^6} + 6^2a_6 + a_4 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

а для величин a_1, a_3, a_5, ... будем иметь уравнения:

$$a_1 = 0, \quad 3^2a_3 + a_1 = 0, \quad 5^2a_5 + a_3 = 0, \ldots$$

Отсюда, полагая $a_0 = 0$ и $a = 1$, получим:

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0 \quad \text{и} \quad a_2 = \frac{1}{2^2}, \quad a_4 = -\frac{1}{2^2\cdot 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right),$$

$$a_6 = \frac{1}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right), \ldots$$

Подставим найденные значения коэфициентов в (122) и заменим обозначение y на Y_0. Мы находим

$$Y_0 = I_0\ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \ldots$$

Функцию Y_0 называют функцией Бесселя **второго рода** и нулевого порядка.

Общий интеграл уравнения (121)

$$y = C_1I_0 + C_2Y_0,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Не приводя доказательства, заметим, что при n целом и не равном нулю, кроме частного решения I_n, существует еще не зависящее от него решение, которое можно представить в виде

$$I_n\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(x/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}\left[\sum_{m=1}^{n+k}\frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\right]$$

Его называют **функцией Бесселя второго рода и n-го порядка**.

Функции Бесселя могут быть вычислены для различных значений параметра n и аргумента x. Числовые величины функций могут быть

табулированы. Весьма подробные таблицы со множеством относящихся к бесселевым функциям формул можно найти в книге Янке и Эмде. Таблицы специальных функций. Эти таблицы в настоящее время изданы на русском и украинском языках.

Между функциями Бесселя с последовательными индексами можно установить некоторые соотношения. Дадим одно соотношение, имеющее практическое значение. Образуя производные, находим из (118)

$$\frac{d}{dx}(x^n I_n) = x^n I_{n-1}, \qquad \frac{d}{dx}(x^{-n} I_n) = -x^{-n} I_{n+1}.$$

Переписав эти равенства в виде

$$x^n \frac{dI_n}{dx} + nx^{n-1} I_n = x^n I_{n-1}, \quad x^{-n}\frac{dI_n}{dx} - nx^{-n-1} I_n = -x^{-n} I_{n+1},$$

поделим первое из них на x^{n-1}, а второе — на x^{-n-1} и результаты вычтем; получим равенство

$$2nI_n = x(I_{n+1} + I_{n-1}),$$

связывающее три последовательные функции Бесселя. Оно дает возможность вычислить одну из трех функций, когда известны две другие.

Известно, сколь важное значение в анализе имеет разложение функций в тригонометрический ряд (ряд Фурье). Это разложение выполнимо вследствие ортогональности функций синус и косинус, выражаемой равенствами:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\, dx = 0. \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m \end{cases}$$

и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m. \end{cases}$$

Равенства, аналогичные этим, можно установить и для бесселевых функций. Заменяя в уравнении (115) x на kx, нетрудно убедиться в том, что функция $I_n(kx)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 I_n(kx)}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dI_n(kx)}{dx} + \left(k^2 - \frac{n^2}{x^2}\right) I_n(kx) = 0,$$

что можно переписать так:

$$\frac{d}{dx}\left[x\,\frac{dI_n(kx)}{dx}\right] + \left(k^2 x - \frac{n^2}{x}\right) I_n(kx) = 0.$$

Пусть k_1 и k_2 обозначают два значения числа k. Тогда

$$\frac{d}{dx}\left[x\,\frac{dI_n(k_1x)}{dx}\right] + \left(k_1^2 x - \frac{n^2}{x}\right) I_n(k_1x) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[x\,\frac{dI_n(k_2x)}{dx}\right] + \left(k_2^2 x - \frac{n^2}{x}\right) I_n(k_2x) = 0.$$

Умножим первое из этих равенств на $I_n(k_2x)$, а второе на $I_n(k_1x)$ и результаты вычтем. Это дает:

$$I_n(k_2x)\frac{d}{dx}\left[x\frac{dI_n(k_1x)}{dx}\right]-I_n(k_1x)\frac{d}{dx}\left[x\frac{dI_n(k_2x)}{dx}\right]+$$
$$+(k_1^2-k_2^2)xI_n(k_1x)I_n(k_2x)=0,$$

или

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dI_n(k_1x)}{dx}I_n(k_2x)-x\frac{dI_n(k_2x)}{dx}I_n(k_1x)\right]+$$
$$+(k_1^2-k_2^2)xI_n(k_1x)I_n(k_2x)=0.$$

Будем интегрировать это равенство в интервале (0, 1). Результат будет такой:

$$[k_1xI_n'(k_1x)I_n(k_2x)-k_2xI_n'(k_2x)I_n(k_1x)]_{x=0}^{x=1}+$$
$$+(k_1^2-k_2^2)\int\limits_0^1 xI_n(k_1x)I_n(k_2x)\,dx=0,$$

причем

$$\frac{dI_n(kx)}{dx}=kI_n'(kx).$$

Пусть $n>0$, тогда, как это следует из определения,

$$I_n=\left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{k\ 0}^{\infty}(-1)^k\frac{(x/2)^{2k}}{\Gamma(n+k+1)\,\Gamma(k+1)},$$

и выражение внутри прямых скобок при $x=0$ обращается в нуль. Следовательно,

$$[k_1I_n'(k_1)I_n(k_2)-k_2I_n'(k_2)I_n(k_1)]+$$
$$+(k_1^2-k_2^2)\int\limits_0^1 xI_n(k_1x)I_n(k_2x)\,dx=0. \qquad (123)$$

Пусть теперь числа k_1 и k_2 — два различных корни уравнения

$$I_n(x)=0. \qquad (124)$$

В таком случае приходим к равенству

$$\int\limits_0^1 xI_n(k_1x)I_n(k_2x)\,dx=0, \qquad (125)$$

выражающему свойство ортогональности функций $\sqrt{x}I_n(k_1x)$ и $\sqrt{x}I_n(k_2x)$.

Второе равенство, относящееся к тому же свойству, имеет вид

$$\int\limits_0^1 xI_n^2(k_1x)=\frac{1}{2}I_{n+1}^2(k_1), \qquad (126)$$

где k_1 есть корень уравнения (124). Докажем это.

Пусть в равенстве (123) k_1 означает один из корней уравнения (124), а k_2 — какое угодно число. Равенство (123) принимает следующий вид:

$$\int_0^1 xI_n(k_1x)\,I_n(k_2x)\,dx = -\frac{k_1 I_n'(k_1)\,I_n(k_2)}{k_1^2-k_2^2}.$$

Пусть $k_2 \to k_1$. Правая часть при этом делается неопределенной. Применяя правило Лопиталя, найдем

$$\int_0^1 xI_n(k_1x)\,I_n(k_2x)\,dx = \frac{1}{2}\,I_n'^2(k_1).$$

Но раньше мы видели, что $\frac{d}{dx}\,[x^{-n}I_n(x)] = -x^{-n}I_{n+1}(x)$.

Полагая здесь $x=k_1$, получим $I_n'(k_1) = -I_{n+1}(k_1)$.

Следовательно,

$$\int_0^1 xI_n^2(k_1x)\,dx = \frac{1}{2}\,I_{n+1}^2(k_1).$$

Пользуясь равенствами (125) и (126), можно заданную функцию разлагать в ряд по функциям Бесселя подобно тому, как это делается при разложении функции в ряд по синусам и косинусам кратных дуг (ряд Фурье).

Отметим еще случаи вырождения бесселевых функций. Если в (111) и (112) положим $n=\frac{1}{2}$, то получим

$$I_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x$$

и

$$I_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos x.$$

Производя выкладки, нужно помнить, что

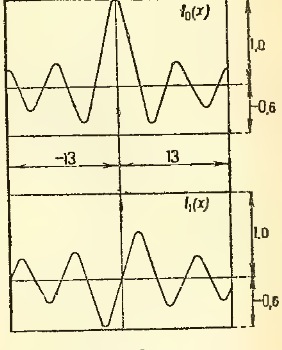
$$\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\,\Gamma(1/2) = 1/2\,\sqrt{\pi}.$$

Можно показать, что вообще в том случае, когда $n=m+\frac{1}{2}$, где m — число целое, бесселевы функции выражаются через элементарные. Например,

$$I_{3/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$$

и

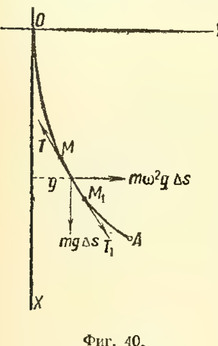
$$I_{-3/2} = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sin x + \frac{\cos x}{x}\right).$$



Фиг. 39.

Бесселевы, или цилиндрические, функции, к изучению которых пришел Бессель в одном мемуаре о планетных возмущениях, имеют широкое применение в приложениях математики (Фурье, в „Theorie analy-

lique de la chaleur", рассматривал эти функции ранее Бесселя, но для значений $n=0$). Необходимость применения бесселевых функций встречается, главным образом, в тех задачах, в которых исследуемое тело имеет форму кругового цилиндра. Поэтому бесселевы функции называют иногда цилиндрическими функциями. Ниже на некоторых примерах мы дадим понятие о применении бесселевых функций.



Фиг. 40.

На фиг. 39 представлены графики функций Бесселя первого рода нулевого и первого порядка.

41. Уравнение вращения гибкой нити. Пусть тяжелая гибкая нить (фиг. 40) вращается около вертикальной оси OX, к точке O которой она своим концом прикреплена. За ось OY примем горизонтальную прямую. Обозначим буквой m массу единицы длины нити. Выделив элемент нити MM_1 длиной Δs, обозначим буквами T и T_1 натяжения нити в точках M и M_1; эти натяжения направлены по касательным к изогнутой оси нити и образуют с осью OX углы α и α_1. Кроме натяжений T и T_1, к элементу MM_1 приложены еще: центробежная сила $m\omega^2 y\,\Delta s$ и сила тяжести $mg\Delta s$. Здесь ω обозначает угловую скорость вращения, а g — ускорение силы тяжести. Заметим, что $y=0$ при $x=0$.

Проектирование на координатные оси дает:

$$T_1\cos\alpha_1 - T\cos\alpha + mg\Delta s = 0,$$
$$T_1\sin\alpha_1 - T\sin\alpha + m\omega^2 y\Delta s = 0,$$

или

$$\left.\begin{aligned}\Delta(T\cos\alpha) + mg\Delta s = 0,\\ \Delta(T\sin\alpha) + m\omega^2 y\Delta s = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (127)$$

Но $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$; $\sin\alpha = \frac{dy}{ds}$ (x и y — координаты точки M). Заменим в уравнениях (127) $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ их значениями, а затем разделим уравнения на Δs и перейдем к пределу в предположении, что Δs стремится к нулю. Мы получим

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + mg = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + m\omega^2 y = 0.$$

Если отклонение нити от оси вращения мало, то можно положить, что $ds=dx$; в таком случае будет:

$$\frac{dT}{dx} = -mg \quad \text{и} \quad T\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dT}{dx} + m\omega^2 y = 0.$$

Первое из этих уравнений дает $T=-mgx+C$. Но при $x=l$ (в точке A) $T=0$; следовательно, $C=mgl$ и $T=mg(x-l)$. Второе уравнение дает

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{l-x}\frac{dy}{dx} + \frac{\omega^2 y}{g(l-x)} = 0.$$

Полагая $2\omega\sqrt{\frac{l-x}{g}}=z$, получим отсюда

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+y=0.$$

Общий интеграл этого уравнения

$$y=C_1I_0(z)+C_2Y_0(z),$$

или

$$y=C_1I_0\left(2\omega\sqrt{\frac{l-x}{g}}\right)+C_2Y_0\left(2\omega\sqrt{\frac{l-x}{g}}\right).$$

В точке A при $x=l$ ордината y должна быть конечной. Но $Y_0(0)=\infty$. Поэтому надо положить $C_2=0$. Кроме того, как выше замечено, в точке O: $y=0$ при $x=0$, т. е.

$$C_1I_0\left(2\omega\sqrt{\frac{l}{g}}\right)=0.$$

Можем принять, что $C_1=0$. В таком случае получим прямолинейную форму равновесия. Возможно еще предположение, что $2\omega\sqrt{\frac{l}{g}}=\alpha$, где α есть корень функции $I_0(t)$. Эта функция обращается в нуль при: $t=2{,}40$; $t=5{,}52$; $t=8{,}65$; ... Принимая во внимание наименьший из этих корней, мы получим

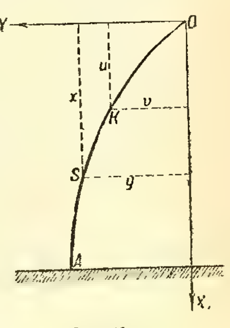
$$2\omega\sqrt{\frac{l}{g}}=2{,}4.$$

Отсюда $\omega=1{,}2\sqrt{\frac{g}{l}}$.

Поскольку угловая скорость ω меньше найденного значения, нить сохраняет вид прямой линии. Если

$$\omega=1{,}2\sqrt{\frac{g}{l}},$$

нить может искривиться. Таким образом полученное для ω выражение является „критическим“ значением угловой скорости.



Фиг. 41.

42. *Продольный изгиб цилиндрического стержня под влиянием собственного веса.* Пусть имеется цилиндрический стержень, нижним концом A заделанный неподвижно. Верхний конец — свободен. Если длина стержня велика по сравнению с размерами поперечного сечения, то вследствие самой незначительной силы стержень может отклониться от вертикального положения и затем, под влиянием силы собственного веса, прогнуться. Вопрос состоит в том, как найти ту „критическую“ длину l, при которой может произойти прогиб.

Приняв точку O за начало, ось OX направляя вертикально вниз, а OY — горизонтально (фиг. 41), выделим элемент стержня K длиной ds

и с координатами центра тяжести u и v. Момент силы тяжести элемента относительно точки $S(x, y)$ равен $q(y-v)\,du$, где q — вес единицы длины стержня и где принято $ds = du$ в предположении, что изгиб достаточно мал. Изгибающий момент в сечении S будет

$$M = q\int_0^x (y-v)\,du = qxy - q\int_0^x v\,du.$$

Граничные условия таковы: 1) $y = 0$ при $x = 0$; 2) изгибающий момент при $x = 0$ также равен нулю, т. е. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; 3) при $x = l$, вследствие заделки конца A стержня, $\frac{dy}{dx} = 0$.

Если в уравнении $EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M$ заменим изгибающий момент его значением, то правая часть уравнения будет содержать знак интеграла. Чтобы его уничтожить, продиференцируем уравнение по x. Мы получим

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{dM}{dx}.$$

Но так как

$$\frac{dM}{dx} = qy + qx\frac{dy}{dx} - q\cdot[v]_{u=x} = qx\frac{dy}{dx},$$

то

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = -qx\frac{dy}{dx} \quad \text{или} \quad \frac{d^2z}{dx^2} + \alpha^2 xz = 0,$$

где $\alpha^2 = \frac{q}{EI}$ и $z = \frac{dy}{dx}$. Полагая $x = \left(\frac{3}{2\alpha}\right)^{2/3}\cdot t^{2/3}$, получим

$$t\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{3}\frac{dz}{dt} + zt = 0.$$

Заменим теперь функцию z через v с помощью соотношения $z = vt^{1/3}$. Получаем уравнение Бесселя

$$t^2\frac{d^2v}{dt^2} + t\frac{dv}{dt} + \left(t^2 - \frac{1}{9}\right)v = 0,$$

в котором параметр $n = \frac{1}{3}$. Его общий интеграл

$$v = C_1 I_{1/3}(t) + C_2 I_{-1/3}(t)$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{\frac{2\alpha}{3}}\, x^{1/2}\left[C_1 I_{1/3}\left(\frac{2\alpha}{3}x^{3/2}\right) + C_2 I_{-1/3}\left(\frac{2\alpha}{3}x^{3/2}\right)\right]. \qquad (128)$$

Написав выражения бесселевых функций $I_{1/3}\left(\frac{2\alpha}{3}x^{3/2}\right)$ и $I_{-1/3}\left(\frac{2\alpha}{3}x^{3/2}\right)$ и внося их в (128), придем к равенству вида

$$\frac{dy}{dx} = C_1(Ax + Bx^4 + Cx^7 + \ldots) + C_2(K + Lx^3 + Mx^6 + \ldots).$$

Составив производную $\frac{d^2y}{dx^2}$ и применяя второе граничное условие, найдем, что $C_1 = 0$. Вследствие этого

$$\frac{dy}{dx} = C_2 I_{-1/3}\left(\frac{2\alpha}{3}x^{3/2}\right).$$

Третье условие дает

$$C_2 I_{-1/3}\left(\frac{2\alpha}{3} l^{3/2}\right) = 0.$$

Если примем $C_2 = 0$, то получим прямолинейную форму равновесия $y = 0$. Прочие формы равновесия получим, если положим

$$I_{-1/3}\left(\frac{2\alpha}{3} l^{3/2}\right) = 0,$$

т. е. что $\frac{2\alpha}{3} l^{3/2}$ служит корнем функции $I_{-1/3}$.

Корни этой функции: 1,87; 4,49; 8,13;.... Наименьшему соответствует критическая длина $l = 1{,}99\sqrt[3]{\frac{EI}{q}}$. Первое же граничное условие будет удовлетворено, если, проинтегрировав (128), выберем вновь полученную произвольную постоянную так, чтобы изогнутая ось проходила через начало координат.

43. *Уравнение продольного изгиба конического стержня.* Задача о продольном изгибе стержня, имеющего форму усеченного конуса, заделанного одним концом и сжимаемого силой P, приводит к такому уравнению Бесселя, которое интегрируется в тригонометрических функциях. Диференциальное уравнение упругой линии

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Py.$$

Пусть r — радиус верхнего основания, а R — нижнего основания конуса. Радиус ρ некоторого сечения S определится из пропорции (фиг. 42)

$$\frac{\rho - r}{R - r} = \frac{x}{l}, \quad \text{т. е.} \quad \rho = r + \frac{R-r}{l}x.$$

Момент инерции этого сечения относительно его нейтральной оси

$$I = \frac{\pi r^4}{4}\left[1 + \frac{x(R-r)}{lr}\right]^4.$$

Фиг. 42

Полагая $\frac{R-r}{r} = \beta$ и заметив, что $\frac{\pi r^4}{4} = I_0$, где I_0 есть момент инерции верхнего сечения, имеем $I = I_0\left(1 + \frac{\beta x}{l}\right)^4$. Граничные условия таковы: 1) $y = 0$ при $x = 0$; 2) $\frac{dy}{dx} = 0$ при $x = l$. Уравнение упругой линии

$$EI_0\frac{d^2y}{dx^2} + \left(1 + \frac{\beta x}{l}\right)^{-4} Py = 0. \qquad (129)$$

Положим в нем $1 + \frac{\beta x}{l} = -\frac{1}{t}$. Из (129) получим

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + \alpha^2 t y = 0, \qquad (130)$$

где $\alpha^2 = \frac{Pl^2}{EI_0\beta^2}$. Далее, в (130) положим $y = zt^{-1/2}$. Получим уравнение Бесселя

$$t^2\frac{d^2z}{dt^2} + t\frac{dz}{dt} + \left(\alpha^2 t^2 - \frac{1}{4}\right)z = 0.$$

Переписав его в виде

$$(t\alpha)^2\frac{d^2z}{d(\alpha t)^2}+(t\alpha)\frac{dz}{d(\alpha t)}+\left(\alpha^2t^2-\frac{1}{4}\right)z=0$$

и заметив, что $n=\frac{1}{2}$, имеем общий интеграл (§ 28)

$$z=C_1I_{1/2}(\alpha t)+C_2I_{-1/2}(\alpha t),$$

или

$$z=\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha t}}\,(C_1\sin\alpha t+C_2\cos\alpha t).$$

Возвращаясь к переменным x и y, получим

$$y=\left(1+\frac{\beta x}{l}\right)\left(A_1\sin\frac{\alpha l}{l+\beta x}+A_2\cos\frac{\alpha l}{l+\beta x}\right),$$

где $A_1=-C_1\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}$ и $A_2=C_2\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}$. Напомним, что при $x=0$ ордината $y=0$. Это дает $A_1\sin\alpha+A_2\cos\alpha=0$; $A_2=-A_1\operatorname{tg}\alpha$. Следовательно,

$$y=-\frac{l+\beta x}{l\cos\alpha}A_1\sin\frac{\alpha\beta x}{l+\beta x}.$$

Образуем производную

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{A_1\beta}{\cos\alpha}\left[\frac{1}{l}\sin\frac{\alpha\beta x}{l+\beta x}+\frac{\alpha}{l+\beta x}\cos\frac{\alpha\beta x}{l+\beta x}\right].$$

Она равна нулю, если $x=l$. Это дает уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha\beta}{1+\beta}=-\frac{\alpha}{1+\beta},$$

из которого при данном β находим α. Критическая сила

$$P=\frac{\alpha^2\beta^2EI_0}{l^2}.$$

Если, например, $R=2r$, то $\beta=1$. Уравнение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{\alpha}{2}$ дает тогда $\alpha=4{,}06$. Критическая сила $P=\frac{4{,}06^2EI_0}{l^2}$.

ГЛАВА IV.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§ 29. Общий ход решения задачи. Общий вид системы двух обыкновенных диференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями таков:

$$\left.\begin{aligned}F_1(t,\,x,\,x',\,x'',\,\ldots,\,x^{(m_1)},\,y,\,y',\,y'',\,\ldots,\,y^{(n_1)})=0,\\F_2(t,\,x,\,x',\,x'',\,\ldots,\,x^{(m_2)},\,y,\,y',\,y'',\,\ldots,\,y^{(n_2)})=0.\end{aligned}\right\}\qquad(131)$$

Здесь t — аргумент, x и y — неизвестные функции. Порядок наивысшей производной для x равен: m_1 — в первом уравнении и m_2 — во втором;

для y равен: n_1 — в первом уравнении и n_2 — во втором. Мы сейчас покажем, что вопрос об интегрировании системы (131) может быть сведен к вопросу об интегрировании одного диференциального уравнения с одной неизвестной функцией. Это станет ясным, если мы покажем, каким образом можно исключить функцию y и ее производные из обоих уравнений.

Продиференцируем первое уравнение n_2 раз, а второе n_1 раз. Мы получим систему, содержащую $n_1 + n_2 + 2$ уравнения. Кроме аргумента t, функции x и ее производных, в состав системы войдут

$$y, \quad y', \quad y'', \quad \ldots, \quad y^{(n_1+n_2)}. \tag{132}$$

Так как число этих величин равно $n_1 + n_2 + 1$, а уравнений имеется $n_1 + n_2 + 2$, то, вообще говоря, можно из полученных уравнений исключить все величины (132). Для этого придется, следуя общему способу, решить $n_1 + n_2 + 1$ уравнений относительно $n_1 + n_2 + 1$ неизвестных, которыми будут служить величины (132). Мы найдем

$$y = \psi(t, x, x', x'', \ldots), \tag{133}$$

$$y' = \psi_1(t, x, x', x'', \ldots),$$

$$y'' = \psi_2(t, x, x', x'', \ldots), \quad \ldots, \quad y^{(n_1+n_2)} = \psi_{n_1+n_2}(t, x, x', \ldots).$$

Затем эти значения подставим в оставшееся неиспользованным $(n_1 + n_2 + 2)$-е уравнение. Тогда величины (132) исключатся и вместо системы двух уравнений с двумя неизвестными функциями мы получим одно уравнение

$$\Phi(t, x, x', x'', \ldots, x^{(p)}) = 0, \tag{134}$$

содержащее аргумент t, функцию x и ее производные. Порядок p наивысшей производной равен большему из чисел:

$$m_1 + n_2 \quad \text{и} \quad m_2 + n_1.$$

Проинтегрировав уравнение (134), будем иметь

$$x = f(t, C_1, C_2, \ldots, C_p), \tag{135}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_p$ — произвольные постоянные. Остается еще найти функцую y. Этого можно достигнуть, образуя производные от (135) и подставляя их значения и значение x в уравнение (133). Результат будет:

$$y = f_1(t, C_1, C_2, \ldots C_p).$$

Таков общий ход решения системы двух уравнений с двумя неизвестными функциями.

Если дана система трех уравнений с тремя неизвестными функциями

$$F_1(t, x, x', x'', \ldots, x^{(m_1)}, y, y', \ldots, y^{(n_1)}, z, z', \ldots, z^{(p_1)}) = 0,$$

$$F_2(t, x, x', x'', \ldots, x^{(m_2)}, y, y', \ldots, y^{(n_2)}, z, z', \ldots, z^{(p_2)}) = 0,$$

и

$$F_3(t, x, x', x'', \ldots, x^{(m_3)}, y, y', \ldots, y^{(n_3)}, z, z', \ldots, z^{(p_3)}) = 0,$$

то, следуя этому же методу, нужно прежде всего определить, сколько раз надо диференцировать каждое уравнение, чтобы иметь возможность исключить функции y и z и их производные из полученной системы и, таким образом, получить одно диференциальное уравнение с одной неизвестной функцией x. Схему решения этого вопроса мы приведем в виде таблицы.

	y	z
F_1	n_1	p_1
F_2	n_2	p_2
F_3	n_3	p_3

Отметив в табличке наивысшие порядки производных от y и z, зачеркнем первую строку и составим суммы из оставшихся чисел, не лежащих в одном столбце и в одной строке. Эти суммы будут:

$$n_2+p_3 \quad \text{и} \quad n_3+p_2.$$

Большая из них покажет, сколько раз надо диференцировать первое уравнение системы.

Зачеркнем затем вторую строку и составим опять суммы из оставшихся чисел, не лежащих в одном столбце и в одной строке. Эти суммы будут:

$$n_1+p_3 \quad \text{и} \quad n_3+p_1.$$

Большая из них покажет, сколько раз надо диференцировать второе уравнение системы.

Зачеркивая, наконец, третью строку, составим суммы:

$$n_1+p_2 \quad \text{и} \quad n_2+p_1,$$

большая из которых покажет, сколько раз следует диференцировать третье уравнение.

Получив путем диференцирования достаточное, для исключения функций y и z и их производных, число уравнений, в дальнейшем поступаем так же, как было указано выше для случая двух неизвестных функций. Формулированное правило можно распространить на систему n уравнений с n неизвестными функциями.

Пример 1.

$$F_1=x'-(bz-cy)=0,$$
$$F_2=y'-(cx-az)=0,$$
$$F_3=z'-(ay-bx)=0.$$

Здесь a, b и c — постоянные.

Составляя суммы, найдем: $n_2+p_3=2$ и $n_3+p_2=0$; следовательно, первое уравнение надо диференцировать два раза. Так как $n_1+p_3=1$ и $n_3+p_1=0$, то второе уравнение будем диференцировать один раз, а так как $n_1+p_2=0$ и

$n_2 + p_1 = 1$, то третье уравнение продиференцируем также один раз. Получим следующую систему из 7 уравнений:

$$x' = bz - cy, \quad y' = cx - az, \quad z' = ay - bx,$$
$$x'' = bz' - cy', \quad y'' = cx' - az'; \quad z'' = ay' - bx',$$
$$x''' = bz'' - cy'';$$

из которых надо исключить 6 величин:

$$y, y', y'', z, z', z''.$$

Проще всего исключение произвести так: внесем значения y' и z' во второе уравнение, а y'' и z'' в третье. Это даст:

$$x'' = a(by + cz) - (b^2 + c^2)x, \tag{136}$$
$$x''' = a(by' + cz') - (b^2 + c^2)x'.$$

Теперь в последнем заменим y' и z' их значениями. Получим

$$x''' = a^2(cy - bz) - (b^2 + c^2)x',$$

или

$$x''' = -(a^2 + b^2 + c^2)x'.$$

Таким образом вопрос приведен к интегрированию одного уравнения с одной неизвестной функцией. Полагая $x' = u$, будем иметь

$$u'' + k^2u = 0, \quad \text{где} \quad k^2 = a^2 + b^2 + c^2;$$

отсюда $u = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ и, следовательно,

$$x = C_3 + \frac{C_1}{k}\sin kt - \frac{C_2}{k}\cos kt.$$

Функции y и z мы найдем, если образуем x' и x'' и значение x' подставим в первое уравнение заданной системы, а значения x'' и x подставим в уравнение (136). Получим два уравнения с двумя неизвестными y и z.

В некоторых случаях можно найти неизвестные функции, удовлетворяющие системе, и не прибегая к повышению порядка производных. Суть дела поясним на примере.

Пример 2.

$$\left.\begin{aligned} 3tx' - (t+1)x + y - tz = 0, \\ 3ty' - (t-2)x - 2y - tz = 0 \\ 3tz' - (2t-1)x - y - 2tz = 0. \end{aligned}\right\} \tag{137}$$

и

Вычитая из первого второе уравнение, имеем

$$t\frac{d(x-y)}{dt} - (x-y) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{dt}{t};$$

интегрирование дает

$$x - y - C_1t = 0. \tag{138}$$

Сложим первое уравнение с третьим. Получим $\frac{d(x+z)}{dt} = x + z$, отсюда

$$x + z - C_2e^t = 0. \tag{139}$$

Сложим, наконец, первое уравнение со вторым и из результата вычтем третье. Это даст

$$3t\frac{d(x+y-z)}{dt} = 0,$$

откуда

$$x + y - z - C_3 = 0. \tag{140}$$

Уравнения (138), (139) и (140) определят три неизвестные функции x, y и z. Мы видим, что систему удалось проинтегрировать, не прибегая к повышению порядка производных.

44. Равновесие газов в сообщающихся сосудах. Предположим, что имеются два сосуда емкостей v_1 и v_2, наполненные газом, упругость которого равна P_1 в первом сосуде и P_2 во втором. Сосуды соединены волосной трубкой, по которой перетекает газ из одного сосуда в другой. Количество газа, перетекающего в одну секунду, будет пропорционально разности квадратов давлений. Задача состоит в том, чтобы определить давления p_1 и p_2 в сосудах в некоторый момент t.

Если обозначим через a количество газа, перетекающего в единицу времени при разности давлений, равной единице, то в течение времени dt из сосуда в сосуд протечет количество газа

$$a\,(p_1^2-p_2^2)\,dt;$$

с другой стороны, заметим, что это количество равно убыли газа за время dt в одном сосуде и прибыли за то же время в другом. Эти обстоятельства дают возможность написать уравнения:

$$\left.\begin{aligned} -bv_1\frac{dp_1}{dt}&=a\,(p_1^2-p_2^2) \\ \text{и}\qquad bv_2\frac{dp_2}{dt}&=a\,(p_1^2-p_2^2), \end{aligned}\right\} \qquad (141)$$

в которых левые и правые части сокращены на dt, а b обозначает постоянный коэфициент.

Почленное вычитание уравнений дает

$$v_1\frac{dp_1}{dt}+v_2\frac{dp_2}{dt}=0,$$

откуда

$$v_1p_1+v_2p_2=C. \qquad (142)$$

Произвольная постоянная C определится, если заметим, что в начальный момент $p_1=P_1$ и $p_2=P_2$; отсюда $C=v_1P_1+v_2P_2$. Уравнение (142) связывает неизвестные p_1 и p_2. Чтобы найти второе уравнение с теми же неизвестными, умножим первое из уравнений (141) на p_2v_2 и сложим со вторым, умноженным на p_1v_1. Это дает

$$bv_1v_2\left(p_1\frac{dp_2}{dt}-p_2\frac{dp_1}{dt}\right)=a\,(p_1^2-p_2^2)\,(p_1v_1+p_2v_2)=aC\,(p_1^2-p_2^2).$$

Разделив на p_1^2, этому уравнению придадим вид

$$\frac{k\,d\frac{p_2}{p_1}}{dt}=1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2, \quad \text{где} \quad k=\frac{bv_1v_2}{aC}.$$

Полагая $\frac{p_2}{p_1}=z$, получим $\frac{k\,dz}{1-z^2}=dt$, и затем, интегрируя,

$$\ln\frac{1+z}{1-z}=\frac{2t}{k}+\ln C_1.$$

Переходя от логарифмов к числам, после замены z через $\frac{p_2}{p_1}$, имеем

$$\frac{p_1+p_2}{p_1-p_2}=C_1e^{\frac{2t}{k}}. \qquad (143)$$

Произвольная постоянная C_1 здесь, как это нетрудно видеть, равна $\frac{P_1+P_2}{P_1-P_2}$. Уравнения (142) и (143) определят искомые давления p_1 и p_2.

§ 30. Способ Эйлера интегрирования системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэфициентами. Рассмотрим этот способ в применении к системе трех линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt}=ax+by+cz,$$

$$\frac{dy}{dt}=a_1x+b_1y+c_1z,$$

и

$$\frac{dz}{dt}=a_2x+b_2y+c_2z$$

однородных с постоянными коэфициентами. Будем искать решения этой системы в виде:

$$x=\lambda e^{rt},\quad y=\mu e^{rt}\quad \text{и}\quad z=\nu e^{rt},$$

где λ, μ, ν и r — постоянные числа. Подстановка этих значений x, y и z в заданные уравнения и сокращение на e^{rt} приведут нас к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}&(a-r)\lambda+b\mu+c\nu=0,\\ &a_1\lambda+(b_1-r)\mu+c_1\nu=0\\ \text{и}\quad &a_2\lambda+b_2\mu+(c_2-r)\nu=0,\end{aligned}\right\}\qquad(144)$$

которые для λ, μ и ν могут дать отличные от нуля значения только в том случае, когда

$$\Delta=\begin{vmatrix}a-r & b & c\\ a_1 & b_1-r & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2-r\end{vmatrix}=0.$$

Этот определитель представляет собой кубическое относительно r уравнение, называемое **характеристическим**. Если его корни r_1, r_2 и r_3, то, подставляя их в уравнения (144), мы получим для чисел λ, μ и ν значения:

$$\lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1;\quad \lambda_2,\ \mu_2,\ \nu_2\quad \text{и}\quad \lambda_3,\ \mu_3,\ \nu_3,$$

и соответственно с этим три системы частных решений

$$x_1=\lambda_1e^{r_1t},\quad y_1=\mu_1e^{r_1t},\quad z_1=\nu_1e^{r_1t};$$

$$x_2=\lambda_2e^{r_2t},\quad y_2=\mu_2e^{r_2t},\quad z_2=\nu_2e^{r_2t}$$

и

$$x_3=\lambda_3e^{r_3t},\quad y_3=\mu_3e^{r_3t},\quad z_3=\nu_3e^{r_3t}.$$

Искомые интегралы будут:

$$x=C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3,$$

$$y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3$$

и

$$z=C_1z_1+C_2z_2+C_3z_3.$$

Если среди корней характеристического уравнения встречаются равные между собой или комплексные, то с соответствующими им частными интегралами надо поступать так, как было указано при интегрировании линейных диференциальных уравнений высших порядков (§ 18).

Пример.

$$\frac{dx}{dt} = 3x - y + z;$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + 5y - z$$

и

$$\frac{dz}{dt} = x - y + 3z.$$

Поступая, как указано выше, мы получим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-r & -1 & 1 \\ -1 & 5-r & -1 \\ 1 & -1 & 3-r \end{vmatrix} = 0,$$

или $r^3 - 11r^2 + 36r - 36 = 0$. Соответственно корням его $r_1 = 2$, $r_2 = 3$ и $r_3 = 6$ получаем из уравнений, для определения λ, μ и ν:

$$(3-r)\lambda - \mu + \nu = 0,$$

$$-\lambda + (5-r)\mu - \nu = 0$$

и

$$\lambda - \mu + (3-r)\nu = 0,$$

значения для чисел λ, μ и ν:

$$\lambda_1 = 1, \quad \mu_1 = 0, \quad \nu_1 = -1;$$

$$\lambda_2 = 1, \quad \mu_2 = 1, \quad \nu_2 = 1$$

и

$$\lambda_3 = 1, \quad \mu_3 = -2, \quad \nu_3 = 1$$

(здесь во всех трех случаях положено $\lambda = 1$).

Сообразно с этим имеем частные решения:

$$x_1 = e^{2t}, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = -e^{2t},$$
$$x_2 = e^{3t}, \quad y_2 = e^{3t}, \quad z_2 = e^{3t},$$

и

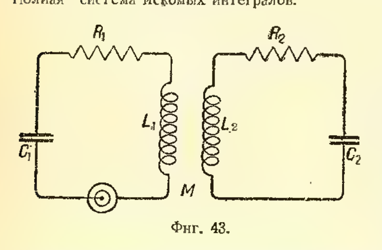
$$x_3 = e^{3t}, \quad y_3 = -2e^{3t}, \quad z_3 = e^{6t}.$$

Полная система искомых интегралов:

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t},$$
$$y = C_2e^{3t} - 2C_3e^{6t}$$

и

$$z = -C_1e^{2t} + C_2e^{6t} + C_3e^{3t}.$$



Фиг. 43.

45. *Система диференциальных уравнений для двух связанных контуров.* Предположим, что имеются два контура (фиг. 43), причем в одном из них действует электродвижущая сила $E_0 \sin \omega t$, а в другом источник тока отсутствует. Ток первого контура вследствие индукции возбуждает электродвижущую силу в другом контуре.

Будем считать данными: сопротивления цепей R_1 и R_2; коэфициенты самоиндукции контуров L_1 и L_2; емкости контуров C_1 и C_2 и коэфициент взаимной индукции M. Искомыми являются силы тока I_1 и I_2.

Если учтем взаимодействие контуров, то для определения сил тока получим систему двух уравнений:

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} + R_1 I_1 + \frac{1}{C_1} \int I_1 dt = E_0 \sin \omega t,$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} + R_2 I_2 + \frac{1}{C_2} \int I_2 dt = 0,$$

получить которую можно на основании соображений, аналогичных тем, которые нами были приведены на стр. 25.

Для устранения знаков интегралов будем диференцировать оба уравнения по времени t. Получим систему двух линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} L_1 \frac{d^2I_1}{dt^2} + M \frac{d^2I_2}{dt^2} + R_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{I_1}{C_1} &= E_0 \omega \cos \omega t \\ \text{и} \quad L_2 \frac{d^2I_2}{dt^2} + M \frac{d^2I_1}{dt^2} + R_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{I_2}{C_2} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (145)$$

второго порядка с двумя неизвестными функциями. Рассмотрим сначала систему двух однородных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} L_1 \frac{d^2I_1}{dt^2} + M \frac{d^2I_2}{dt^2} + R_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{I_1}{C_1} &= 0 \\ \text{и} \quad L_2 \frac{d^2I_2}{dt^2} + M \frac{d^2I_1}{dt^2} + R_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{I_2}{C_2} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (146)$$

Применяя к ее интегрированию метод Эйлера, положим

$$I_1 = \lambda e^{rt} \quad \text{и} \quad I_2 = \mu e^{rt}.$$

Подстановка в (146) и сокращение на e^{rt} дает:

$$\left.\begin{aligned} \lambda\left(L_1 r^2 + R_1 r + \frac{1}{C_1}\right) + \mu M r^2 &= 0 \\ \text{и} \quad \lambda M r^2 + \mu\left(L_2 r^2 + R_2 r + \frac{1}{C_2}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (147)$$

Отсюда для λ и μ мы сможем получить значения, не равные одновременно нулю лишь в том случае, когда определитель системы (147) равен нулю, т. е. когда

$$\left(L_1 r^2 + R_1 r + \frac{1}{C_1}\right)\left(L_2 r^2 + R_2 r + \frac{1}{C_2}\right) - M^2 r^4 = 0. \qquad (148)$$

Это уравнение четвертой степени относительно r и коэфициент при r^4 в нем равен $L_1 L_2 - M^2$. Если величина M^2 сравнительно с $L_1 L_2$ мала (как это обыкновенно бывает на практике), то корни уравнения (148) мало отличаются от корней уравнения

$$\left(L_1 r^2 + R_1 r + \frac{1}{C_1}\right)\left(L_2 r^2 + R_2 r + \frac{1}{C_2}\right) = 0,$$

которое приводится к двум квадратным:

$$L_1 r^2 + R_1 r + \frac{1}{C_1} = 0 \quad \text{и} \quad L_2 r^2 + R_2 r + \frac{1}{C_2} = 0.$$

Остановимся на случае, когда корни этих квадратных уравнений комплексны. Эти корни будут иметь вещественные части отрицательными, в чем нетрудно убедиться непосредственно. Но это значит, что корни уравнения (148) также будут комплексны с отрицательными вещественными частями, т. е. они будут иметь вид:

$$r_1 = -\alpha + \beta i, \quad r_2 = -\alpha - \beta i, \quad r_3 = -\gamma + \delta i, \quad r_4 = -\gamma - \delta i.$$

Сообразно с этим для сил тока мы получим выражения:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= D_1 e^{-\alpha t} \cos \beta t + D_2 e^{-\alpha t} \sin \beta t + D_3 e^{-\gamma t} \cos \delta t + D_4 e^{-\gamma t} \sin \delta t \\ &\text{и} \\ I_2 &= \Gamma_1 e^{-\alpha t} \cos \beta t + \Gamma_2 e^{-\alpha t} \sin \beta t + \Gamma_3 e^{-\gamma t} \cos \delta t + \Gamma_4 e^{-\gamma t} \sin \delta t, \end{aligned}\right\} \quad (149)$$

в которых величины D_i и Γ_i — произвольные постоянные, причем коэфициенты Γ_i линейно зависят от коэфициентов D_i.

Мы проинтегрировали систему (146). Для отыскания же интегралов системы (145) нам придется отыскать еще ее частные решения i_1 и i_2 и эти решения приписать к правым частям равенств (149).

Частные решения надлежит искать в форме

$$i_1 = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad \text{и} \quad i_2 = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t.$$

После подстановки этих выражений в (145) и после сравнения коэфициентов при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ мы, для определения A, B, A_1 и B_1, получим уравнения:

$$-AL_1\omega^2 - A_1 M\omega^2 + BR_1\omega + \frac{A}{C_1} = E_0\omega,$$

$$-BL_1\omega^2 - B_1 M\omega^2 - AR_1\omega + \frac{B}{C_1} = 0,$$

$$-A_1 L_2\omega^2 - AM\omega^2 + B_1 R_2\omega + \frac{A_1}{C_2} = 0$$

и

$$-B_1 L_2\omega^2 - BM\omega^2 - A_1 R_2\omega + \frac{B_1}{C_2} = 0.$$

ГЛАВА V.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§ 31. О способах отыскания приближенных решений. С точки зрения практических приложений весьма важное значение имеет уменье вычислить интеграл диференциального уравнения. В тех случаях, когда интеграл выражается в конечном виде, вопрос трудностей не представляет. Вычислив постоянные и получив частный интеграл, мы можем

для каждого значения аргумента вычислить соответствующее значение функции. Но случаи интегрирования уравнений в замкнутой форме представляют собой явление, можно сказать, исключительное. Необходимо поэтому дать такой способ иахождения численного значения неизвестной функции, который был бы пригоден независимо от того, выражается ли эта функция через аргумент в конечном виде или не выражается. В настоящее время имеется немало таких способов, обладающих различными, но достаточными для практики степенями точности. Среди других более известны методы: Пикара, Рунге-Кутта, А. Н. Крылова, Чаплыгина, Хеуна. Лордом Кельвином была даже построена особая машина для вычисления интегралов линейных диференциальных уравнений второго порядка. Эта машина впоследствии была усовершенствована академиком А. Н. Крыловым и приспособлена для уравнений третьего и четвертого порядка.

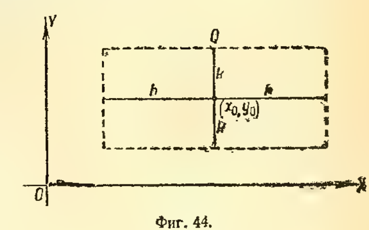
Изложение приемов численного интегрирования диференциальных уравнений мы начнем с доказательства „теоремы о существовании интеграла диференциального уравнения". Мы приведем доказательство этой теоремы, данное в 1890 г. Пикаром. Применяемый Пикаром прием доказательства, известный под названием способа последовательных приближений, наряду с теоретическим значением имеет и чисто практическое, позволяя с желаемой степенью точности вычислять интегралы диференциальных уравнений.

§ 32. Способ Пикара вычисления интегралов диференциальных уравнений первого порядка. Изложим метод Пикара в применении к диференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \quad (150)$$

относительно которого известно, что $y=y_0$ при $x=x_0$.

Предположим, что $f(x, y)$ непрерывна во всех точках прямоугольника Q, центром которого служит начальная точка (x_0, y_0), а стороны параллельны координатным осям (фиг. 44). Предположим также, что во всех точках этого прямоугольника функция $f(x, y)$ имеет ограниченную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$.



Фиг. 44.

Выражая эти обстоятельства неравенствами, можем сказать, что функция $f(x, y)$ непрерывна и $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|<L$ при

$$x_0-h<x<x_0+h \quad \text{и} \quad y_0-k<y<y_0+k,$$

или, что то же, при

$$|x-x_0|<h \quad \text{и} \quad |y-y_0|<k.$$

Прием последовательных приближений состоит в следующем.

Проинтегрируем обе части уравнения (150) по x. Приняв во внимание начальное условие, получим

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx. \qquad (151)$$

Это — интегральное уравнение, равносильное совокупности дифференциального уравнения (150) и начального условия.

Уравнение (151) будем решать следующим образом. В качестве „нулевого", наиболее грубого, приближения к искомому решению возьмем

$$y = y_0.$$

Подставим y_0 вместо y в правую часть уравнения (151).

Если результат этой подстановки окажется равным y_0, то наша задача решена. Вообще же говоря, этого не будет. Обозначим через y_1 результат указанной подстановки:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx. \qquad (152)$$

Примем величину y_1 за первое приближение к неизвестной y. Подставим теперь y_1 вместо y в правую часть уравнения (151). Результат подстановки обозначим через y_2:

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx.$$

За второе приближение к y примем y_2 и т. д.

Вообще, если нами построено $(n-1)$-е приближение y_{n-1}, то за n-е приближение примем

$$y_n = \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx + y_0. \qquad (153)$$

Мы получим, таким образом, бесконечную последовательность приближений:

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n, \ldots$$

Надо доказать, что **эта последовательность функций сходится**, т. е. существует $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = Y$, и что **функция Y удовлетворяет уравнению** (150).

Вычисляя последовательные приближения по формулам (151), (152) и (153), надо иметь в виду, что значения $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ не должны выходить из области прямоугольника Q, т. е. должно быть

$$|y_n - y_0| < k. \qquad (154)$$

Выберем в области Q две точки (x, y_1) и (x, y_2). По формуле Лагранжа можем написать, что

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = (y_2 - y_1)\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{y=\eta},$$

причем η лежит между y_1 и y_2. В силу $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < L$ имеем

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| < L\,|y_2 - y_1|. \qquad (155)$$

Условие (155) называется **условием Коши-Липшитца.**

Обозначим через M наибольшее абсолютное значение непрерывной функции $f(x, y)$ в области Q. В таком случае

$$|f(x, y)| < M. \tag{156}$$

Покажем, что условие (154) будет выполнено, если x находится в промежутке

$$|x - x_0| < l, \tag{157}$$

где l есть меньшее из чисел h и $\frac{k}{M}$, т. е. $l \leqslant h$ и $l \leqslant \frac{k}{M}$.

Действительно, для случая $n = 1$ будем иметь

$$|y - y_0| = \int_{x_0}^{x} |f(x, y_0)| \, dx < \int_{x_0}^{x} M dx,$$

т. е.

$$|y_1 - y_0| < M(x - x_0). \tag{158}$$

При соблюдении же (157)

$$|y_1 - y_0| < k;$$

мы видим, что условие (154) удовлетворяется при $n = 1$.

В случае $n = 2$ имеем

$$|y_2 - y_0| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(x, y_1)| \, dx.$$

Но так как $|f(x, y)| < M$, то $|y_2 - y_0| < M|x - x_0|$, и вследствие (157): $|y_2 - y_0| < k$, т. е. условие (154) удовлетворяется и при $n = 2$. Точно так же можно доказать справедливость неравенства (154) при всяком n.

Имея в виду показать, что y_n при $n \to \infty$ стремится к пределу, представим y_n в виде

$$y_n = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}). \tag{159}$$

Оценим абсолютное значение входящих в состав ряда разностей.

Пусть, например, $x > x_0$. Имеем

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y_0) \, dx \right| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(x, y_0)| \, dx < M \int_{x_0}^{x} dx$$

или

$$|y_1 - y_0| < M(x - x_0).$$

Далее,

$$|y_2 - y_1| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(x, y_1) - f(x, y_0)| \, dx.$$

Приняв во внимание условие (155) — условие Коши-Липшитца, — найдем

$$|y_2 - y_1| < L \int_{x_0}^{x} |y_1 - y_0| \, dx,$$

или, вследствие (158),

$$|y_2-y_1|<LM\int_{x_0}^{x}(x-x_0)\,dx,$$

т. е.

$$|y_2-y_1|<LM\frac{(x-x_0)^2}{2!}. \qquad (160)$$

Для следующего члена y_3-y_2 имеем $|y_3-y_2|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(x,\ y_2)-$ $-f(x,y_1)|\,dx$, или, принимая во внимание (155),

$$|y_3-y_2|<L\int_{x_0}^{x}|y_2-y_1|\,dx.$$

Но вследствие (160)

$$|y_3-y_2|<L^2M\frac{(x-x_0)^3}{3!}.$$

Вообще

$$|y_n-y_{n-1}|<L^{n-1}M\frac{(x-x_0)^n}{n!}.$$

Но бесконечный ряд

$$y_0+M(x-x_0)+LM\frac{(x-x_0)^2}{2!}+L^2M\frac{(x-x_0)^3}{3!}+\ldots, \qquad (161)$$

сумма которого равна

$$\frac{M}{L}\left[e^{L(x-x_0)}-1\right]+y_0,$$

сходится при всяком конечном x. Следовательно, бесконечный ряд

$$y_0+(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+\ldots+(y_n-y_{n-1})+\ldots, \qquad (162)$$

каждый член которого по абсолютной величине меньше соответствующего члена ряда (161), будет равномерно сходиться в интервале $(x_0-h,\ x_0+h)$. Сумма его Y будет непрерывной функцией x в том же интервале.

Величина y_n есть сумма n первых членов ряда (162). А это значит, что сумма ряда (162) есть предел величины y_n. Таким образом существование предела y_n доказано.

Надо еще доказать, что Y удовлетворяет уравнению (150). Для этого заметим, что разность

$$Y-y_{n-1},$$

при $n\to\infty$, стремится равномерно к нулю. Но из (155) следует, что разность

$$f(x,\ Y)-f(x,\ y_{n-1})$$

тоже стремится равномерно к нулю. Следовательно,

$$\left|\int_{x_0}^{x}f(x,\ Y)-f(x,\ y_{n-1})\,dx\right|\to 0,$$

т. е.

$$\int_{x_0}^{x}f(x,\ y_{n-1})\,dx\to\int_{x_0}^{x}f(x,\ Y)\,dx \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

Переходя к пределу в равенстве (153), получим

$$Y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, Y)\, dx. \qquad (163)$$

Таким образом Y удовлетворяет уравнению (152). Полагая в (163) $x = x_0$, находим $Y = y_0$. Диференцируя же, получаем

$$Y' = f(x, Y).$$

Построенная нами функция Y удовлетворяет, следовательно, как диференциальному уравнению (150), так и начальному условию. Тем самым наша задача решена.

Построенное нами решение Y — единственное.

На доказательстве этого останавливаться здесь не будем.

Способ последовательных приближений может быть распространен и на случай системы диференциальных уравнений.

Пример. Приложим способ Пикара к вычислению того частного интеграла уравнения

$$y' = x^2 + y,$$

который дает $y = 1$ при $x = 0$; следовательно, $x_0 = 0$ и $y_0 = 1$.

Имеем

$$y = 1 + \frac{x^3}{3} + \int_0^x y\,dx.$$

Отсюда

$$y_1 = 1 + \frac{x^3}{3} + \int_0^x y_0 dx = 1 + x + \frac{x^3}{3},$$

$$y_2 = 1 + \frac{x^3}{3} + \int_0^x y_1 dx = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{12},$$

$$y_3 = 1 + \frac{x^3}{3} + \int_0^x y_2 dx = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{60},$$

$$y_4 = 1 + \frac{x^3}{3} + \int_0^x y_3 dx = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{60} + \frac{x^6}{360},$$

$$y_5 = 1 + \frac{x^2}{3} + \int_0^x y_4 dx = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{40} + \frac{x^6}{360} + \frac{x^7}{2520},$$

. . . .

Обозначим разности между вторым и первым приближениями через R_1; между третьим и вторым — через R_2 и т. д. Будем иметь:

$$R_1 = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2}, \quad R_2 = \frac{x^3}{60} + \frac{x^2}{6}, \quad R_3 = \frac{x^6}{360} + \frac{x^4}{24}, \quad R_4 = \frac{x^7}{2520} + \frac{x^3}{120}, \ldots,$$

т. е.

$$y_n = 1 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{360} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^7}{2520} + \frac{x^5}{120} + \ldots$$

Пусть требуется вычислить искомый интеграл при $x = 0{,}6$. Последовательные разности и последовательные приближения будут

$$R_1 = 0{,}1908; \quad R_2 = 0{,}037296; \quad R_3 = 0{,}0055296; \quad R_4 = 0{,}00065911, \ldots$$

и

$$y_1 = 1{,}672; \quad y_2 = 1{,}8628; \quad y_3 = 1{,}900096; \quad y_4 = 1{,}9056256; \quad y_5 = 1{,}90628471, \ldots$$

§ 33. Способ Рунге-Кутта вычисления интегралов диференциального уравнения первого порядка. Пусть дано диференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{164}$$

и известно, что когда аргумент $x = x_0$, то функция $y = y_0$. Требуется вычислить значение функции Y, соответствующее заданному значению аргумента X.

В общих чертах вопрос этот был рассмотрен в § 26 при интегрировании уравнений n-го порядка посредством рядов. Там же было упомянуто и о трудностях, встречаемых при вычислениях.

Прежде всего проследим за общим ходом задачи о вычислении приближенного значения неизвестной функции.

Разделим промежуток $X - x_0$ на подходящее число n равных частей; частное $(X - x_0) : n$ обозначим буквой h и примем его за приращение аргумента. Новое значение аргумента, следовательно, будет

$$x_1 = x_0 + h.$$

В соответствии с этим функция y получит приращение, которое мы обозначим буквой k. Если мы сумеем вычислить k, то будем знать и новое значение функции

$$y_1 = y_0 + k.$$

Теперь известные нам величины x_1 и y_1 примем за исходные. Опять дадим аргументу приращение h. Новое его значение

$$x_2 = x_1 + h.$$

Соответствующее приращение функции обозначим через k_1. Если мы сумеем вычислить k_1, то будем знать и новое значение функции

$$y_2 = y_1 + k_1.$$

Примем величины x_2 и y_2 за исходные и повторим ту же операцию. После n-кратного ее повторения мы вычислим искомое Y. Весь вопрос в том, как вычислять приращения функции k.

Согласно способу Рунге-Кутта это следует производить так. Сначала находим число δ_1 по формуле

$$\delta_1 = hf(x_0, y_0);$$

потом находим последовательно числа:

$$\delta_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, \ y_0 + \frac{\delta_1}{2}\right),$$

$$\delta_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, \ y_0 + \frac{\delta_2}{2}\right)$$

и

$$\delta_4 = hf(x_0 + h, \ y_0 + \delta_3).$$

Искомое приращение функции

$$k=\frac{\delta_1+\delta_4}{6}+\frac{\delta_2+\delta_3}{3}.$$

Расположение действий примем такое, как указано на схеме 1.

Схема 1.

x	y	$f(x, y)$	$\delta=h\cdot f(x, y)$	k
x_0	y_0	$f(x_0, y_0)$	δ_1	$\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_4)$
$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{\delta_1}{2}$	$f\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{\delta_1}{2}\right)$	δ_2	$+\ \delta_2+\delta_3$
$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{\delta_2}{2}$	$f\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{\delta_2}{2}\right)$	δ_3	сумма
x_0+h	$y_0+\delta_3$	$f(x_0+h, y_0+\delta_3)$	δ_4	$k=\frac{1}{3}$ (суммы)
x_0+h	y_0+k			

Обоснование этого способа читатель найдет ниже.

Пример. Дано диференциальное уравнение

$$y'=\frac{y-x}{y+x}.$$

Известно, что $y=1$, когда аргумент $x=0$. Требуется вычислить значение функции Y, соответствующее значению $x=0,2$.

Вычисления располагаем согласно вышеприведенной схеме; ограничимся точностью до пяти десятичных знаков. Примем $h=0,1$.

x	y	$f(x, y)$	$\delta=h\cdot f(x, y)$	k
0	1	1	0,1	0,09161
0,05	1,05	0,90909	0,09091	+ 0,18178
0,05	1,04545	0,90871	0,09087	0,27339
0,1	1,09087	0,83206	0,08321	0,09113
0,1	1,09113	0,83209	0,08321	0,07098
0,15	1,13274	0,76613	0,07661	+ 0,15316
0,15	1,12944	0,76552	0,07655	0,23014
0,2	1,16768	0,70753	0,07075	0,07338

Искомое значение $Y=1,09113+0,07338=1,16451$.

Для читателя, интересующегося вопросом о точности произведенного вычисления, приведем вкратце те соображения, с помощью которых может быть решен этот вопрос. Общая идея такова: напишем выражение приращения функции, обозначениого нами буквой k, согласно формуле Тэйлора, и сравним его с выражением приращения, найденным по способу Рунге-Кутта.

Разлагая функцию y_1 в ряд Тэйлора, будем иметь

$$y_1 = y_0 + k = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2!} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''' + \frac{h^4}{4!} y_0'''' + \ldots,$$

откуда истинное значение приращения

$$k = hy_0' + \frac{h^2}{2!} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''' + \frac{h^4}{4!} y_0'''' + \ldots. \tag{165}$$

Определим входящие сюда коэфициенты y_0', y_0'', y_0''', ... Имеем $y_0' = f(x_0, y_0)$ — на основании уравнения (164). Запишем это сокращенно так: $y_0' = f_0$.

Образуя производную от (164), находим

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'. \tag{166}$$

Следовательно,

$$y_0'' = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y_0',$$

или, кратко, $y_0'' = f_1 + f_2 f_0$, где $f_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ и $f_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$. Диференцируя (166), будем иметь

$$y''' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y')^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y''. \tag{167}$$

Значит

$$y_0''' = f_{11} + 2f_{12} f_0 + f_{22} f_0^2 + f_2 (f_1 + f_2 f_0),$$

где

$$f_{11} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0, \quad f_{12} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 \quad \text{и} \quad f_{22} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0.$$

Диференцируя (167), мы найдем y'''' и т. д. Если введем обозначения

$$f_1 + f_2 f_0 = D_1, \quad f_{12} + f_2 f_0 = D,$$
$$f_{11} + 2f_{12} f_0 + f_{22} f_0^2 = D_2,$$
$$f_{111} + 3f_{112} f_0 + 3f_{122} f_0^2 + f_{222} f_0^3 = D_3,$$

то значения первых четырех коэфициентов будут такие:

$$\left.\begin{aligned} &y_0' = f_0, \quad y_0'' = D_1, \quad y_0''' = D_2 + D_1 f_2 \\ \text{и} \quad &y_0'''' = D_3 + D_2 f_2 + D_1 f_2^2 + 3D_1 D. \end{aligned}\right\} \tag{168}$$

Подставляя эти значения в (165), мы получим истинное значение приращения

$$k = A + \frac{h^5}{5!} y_0^{\mathrm{V}} + \ldots, \tag{169}$$

где A представляет собой сумму первых четырех членов правой части равенства (165) после вышеупомянутой подстановки.

Теперь преобразуем приближенное выражение приращения функции

$$k = \frac{\delta_1 + \delta_4}{6} + \frac{\delta_2 + \delta_3}{3}, \tag{170}$$

определяемое по способу Рунге-Кутта, и сравним его с (169). Пользуясь формулой Тэйлора

$$f(x_0 + \alpha,\ y_0 + \beta) = f_0 + \alpha f_1 + \beta f_2 + \frac{1}{2}(\alpha^2 f_{11} + 2\alpha\beta f_{12} + \beta^2 f_{22}) + \\ + \frac{1}{6}(\alpha^3 f_{111} + 3\alpha^2\beta f_{112} + 3\alpha\beta^2 f_{122} + \beta^3 f_{222}) + \ldots$$

для двух независимых переменных, найдем разложения для δ_2, δ_3 и δ_4. Если ограничимся членами, содержащими четвертые степени приращения h, то получим:

$$\delta_2 = h\left(f_0 + \frac{1}{2} hD_1 + \frac{1}{8} h^2 D_2 + \frac{1}{48} h^3 D_3\right),$$

$$\delta_3 = hf_0 + \frac{1}{2} h^2 D_1 + \frac{1}{8} h^3 (2f_2 D_1 + D_2) + \frac{1}{48} h^4 (6D_1 D + 3f_2 D_2 + D_3),$$

$$\delta_4 = hf_0 + h^2 D_1 + \frac{1}{2} h^3 (f_2 D_1 + D_2) + \\ + \frac{1}{24} h^4 (6f_2^2 D_1 + 12 D_1 D_2 + 3f_2 D_2 + D_3)$$

и, кроме того, $\delta_1 = hf_0$. Теперь подставим значения δ_1, δ_2, δ_3 и δ_4 в (170). Мы увидим, что $k = A$, т. е. разница между истинным значением приращения k и его приближенным значением, вычисленным по способу Рунге-Кутта, начинается только с члена, содержащего пятую степень приращения h.

§ 34. Способ Рунге-Кутта вычисления интегралов системы двух уравнений первого порядка или одного уравнения второго порядка. Пусть дана система двух диференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(t,\ x,\ y) \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt} = \Psi(t,\ x,\ y)$$

первого порядка и известно, что $x = x_0$ и $y = y_0$, когда аргумент $t = t_0$. Требуется вычислить значения X и Y функций, соответствующие заданному значению T аргумента.

Разделим, как и раньше, промежуток $T - t_0$ на некоторое число n равных частей (равенство частей, впрочем, необязательно) и частное $(T - t_0) : n = h$ примем за приращение аргумента t.

Пусть соответствующие приращения функции будут k и l. Согласно способу Рунге-Кутта k и l вычисляются нижеследующим образом. Прежде всего вычисляем

$$\delta_1 = h\Phi(t_0,\ x_0,\ y_0) \quad \text{и} \quad \varepsilon_1 = h\Psi(t_0,\ x_0,\ y_0).$$

Затем вычисляем

$$\delta_2 = h\Phi\left(t_0 + \frac{h}{2},\ x_0 + \frac{\delta_1}{2},\ y_0 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right),$$

$$\varepsilon_2 = h\Psi\left(t_0 + \frac{h}{2},\ x_0 + \frac{\delta_1}{2},\ y_0 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right),$$

Схема 2.

t	x	y	$\delta = h\Phi(t, x, y)$	$\varepsilon = h\Psi(t, x, y)$	k	l
t_0	x_0	y_0	$\delta_1 = h\Phi(t_0, x_0, y_0)$	$\varepsilon_1 = h\Psi(t_0, x_0, y_0)$	$\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_4)$ +	$\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_4)$ +
$t_0 + \frac{h}{2}$	$x_0 + \frac{\delta_1}{2}$	$y_0 + \frac{\varepsilon_1}{2}$	$\delta_2 = h\Phi\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{\delta_1}{2}, y_0 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)$	$\varepsilon_2 = h\Psi\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{\delta_1}{2}, y_0 + \frac{\varepsilon_1}{2}\right)$	$\delta_2 + \delta_3$	$\varepsilon_2 + \varepsilon_3$
$t_0 + \frac{h}{2}$	$x_0 + \frac{\delta_2}{2}$	$y_0 + \frac{\varepsilon_2}{2}$	$\delta_3 = h\Phi\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{\delta_2}{2}, y_0 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)$	$\varepsilon_3 = h\Psi\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{\delta_2}{2}, y_0 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)$	сумма	сумма
$t_0 + h$	$x_0 + \delta_3$	$y_0 + \varepsilon_3$	$\delta_4 = h\Phi(t_0 + h, x_0 + \delta_3, y_0 + \varepsilon_3)$	$\varepsilon_4 = h\Psi(t_0 + h, x_0 + \delta_3, y_0 + \varepsilon_3)$	$k = \frac{1}{3}$ (суммы)	$l = \frac{1}{3}$ (суммы)
$t_0 + h$	$x_0 + k$	$y_0 + l$				

Схема 3.

t	x	y	x'	y'	δ	ε	μ	ν	k	l	m	n
t_0	x_0	y_0	x'_0	y'_0	δ_1	ε_1	μ_1	ν_1	$\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_4)$	$\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_4)$	$\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_4)$	$\frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_4)$
$t_0 + \frac{h}{2}$	$x_0 + \frac{\delta_1}{2}$	$y_0 + \frac{\varepsilon_1}{2}$	$x'_0 + \frac{\mu_1}{2}$	$y'_0 + \frac{\nu}{2}$	δ_2	ε_2	μ_2	ν_2	$\delta_2 + \delta_3$	$\varepsilon_2 + \varepsilon_3$	$\mu_2 + \mu_3$	$\nu_2 + \nu_3$
$t_0 + \frac{h}{2}$	$x_0 + \frac{\delta_2}{2}$	$y_0 + \frac{\varepsilon_2}{2}$	$x'_0 + \frac{\mu_2}{2}$	$y'_0 + \frac{\nu_2}{2}$	δ_3	ε_3	μ_3	ν_3	сумма	сумма	сумма	сумма
$t_0 + h$	$x_0 + \delta_3$	$y_0 + \varepsilon_3$	$x'_0 + \mu_3$	$y'_0 + \nu_3$	δ_4	ε_4	μ_4	ν_4	$k = \frac{1}{3}$ (суммы)	$l = \frac{1}{3}$ (суммы)	$m = \frac{1}{3}$ (суммы)	$n = \frac{1}{3}$ (суммы)

$$\delta_3 = h\Phi\left(t_0 + \frac{h}{2},\ x_0 + \frac{\delta_2}{2},\ y_0 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right),$$

$$\varepsilon_3 = h\Psi\left(t_0 + \frac{h}{2},\ x_0 + \frac{\delta_2}{2},\ y_0 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right),$$

$$\delta_4 = h\Phi(t_0 + h,\ x_0 + \delta_3,\ y_0 + \varepsilon_3) \quad \text{и} \quad \varepsilon_4 = h\Psi(t_0 + h,\ x_0 + \delta_3,\ y_0 + \varepsilon_3).$$

Приращения функций определяются формулами:

$$k = \frac{\delta_1 + \delta_4}{6} + \frac{\delta_2 + \delta_3}{3} \quad \text{и} \quad l = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_4}{6} + \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}.$$

Повторив вычисление n раз, сможем найти X и Y. Расположение действий примем такое, какое указано на схеме 2.

Пример. Дана система двух диференциальных уравнений

$$x' = \frac{x}{t} + y \quad \text{и} \quad y' = -\frac{x}{t^2} + \frac{2y}{t},$$

и известно, что значению $t = 0{,}6$ аргумента соответствуют значения $x = 0$ и $y = 1$ функций. Требуется вычислить значения X и Y функций, соответствующие значению $T = 1$ аргумента.

Вычисления располагаем согласно принятой схеме. Приращение аргумента h примем равным 0,2. Заметим, что в данном случае

$$\Phi = \frac{x}{t} + y \quad \text{и} \quad \Psi = -\frac{x}{t^2} + \frac{2y}{t}.$$

Результаты будем вычислять с четырьмя десятичными знаками.

t	x	y	δ	ε	k	l
0,6	0	1	0,2	0,6667	0,3110	0,7135
0,7	0,1	1,3333	0,2952	0,7211	+ 0,6095	+ 1,4383
0,7	0,1476	1,3605	0,3143	0,7172	0,9205	2,1518
0,8	0,3143	1,7172	0,4220	0,7604	0,3068	0,7173
0,8	0,3068	1,7173	0,4202	0,7628	0,5477	0,7991
0,9	0,5169	2,0987	0,5346	0,8051	+ 1,0861	+ 1,6055
0,9	0,5741	2,1198	0,5515	0,8004	1,6338	2,4046
1,0	0,8583	2,5177	0,6752	0,8354	0,5446	0,8015

Искомые значения функций:

$$X = 0{,}3068 + 0{,}5446 = 0{,}8514 \quad \text{и} \quad Y = 1{,}7173 + 0{,}8015 = 2{,}5188.$$

Заметим, что если дано диференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right),$$

то, полагая

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

мы приведем его к системе двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dy}{dt}=f(t, x, y);$$

$$\frac{dx}{dt}=y.$$

Отсюда следует, что изложенный сейчас прием вычисления интегралов системы может служить и для вычисления интегралов одного дифференциального уравнения второго порядка.

Пример. Дано дифференциальное уравнение

$$t\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}-tx=0$$

и известно, что значению $t=1$ аргумента соответствуют значения $x=1$ функции и $\frac{dx}{dt}=2$ ее производной. Требуется вычислить значение X функции и Y ее производной, соответствующее значению $t=1,4$.

Положив $\frac{dx}{dt}=y$, мы получим систему:

$$\frac{dx}{dt}=y \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt}=x-\frac{2y}{t},$$

с которой поступаем согласно приведенной схеме, принимая $h=0,2$. Отметим, что $\Phi(t, x, y)=y$ и $\Psi(t, x, y)=x-\frac{2y}{t}$, и $x=1$ и $y=2$ при $t=1$.

t	x	y	δ	ε	k	l
1	1	2	0,4	—0,6	0,3575	—0,4263
1,1	1,2	1,7	0,35	—0,3782	0,7022	—0,8027
1,1	1,17	1,8109	0,3622	—0,4245	1,0597	—1,2290
1,2	1,3622	1,5755	0,3151	—0,2527	0,3532	—0,4097
1,2	1,3532	1,5903	0,3181	—0,2595	0,2925	—0,1548
1,3	1,5123	1,4606	0,2921	—0,1461	0,5956	—0,3285
1,3	1,4993	1,5173	0,3035	—0,1824	0,8881	—0,4833
1,4	1,6567	1,3349	0,2670	—0,0501	0,2960	—0,1611

Искомое значение функции

$$X=1,3532+0,2960=1,6492,$$

а ее производной

$$Y=1,5903-0,1611=1,4292.$$

§ 35. Способ Рунге-Кутта вычисления интегралов системы двух уравнений второго порядка. Пусть дана система двух уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\Phi\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

и

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\Psi\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

второго порядка. Когда аргумент $t=t_0$, то функции x и y имеют значения x_0 и y_0, а их производные x_0' и y_0'. Требуется вычислить значения X и Y функций, соответствующие значению T аргумента.

Полагая $\frac{dx}{dt} = x'$ и $\frac{dy}{dt} = y'$, мы можем нашу систему рассматривать как систему четырех уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dx'}{dt} = \Phi(t, x, y, x', y') \quad \text{и}$$

$$\frac{dy'}{dt} = \Psi(t, x, y, x', y')$$

с четырьмя неизвестными функциями x, y, x' и y'.

Обозначим выбираемое нами произвольно приращение аргумента через h, а соответствующие ему приращения функций x и y и их производных x' и y' через k, l, m и n. Нахождение чисел k, l, m и n, согласно способу Рунге-Кутта, требует предварительного вычисления количеств:

$$\delta_1 = hx'_0, \qquad \varepsilon_1 = hy'_0,$$

$$\delta_2 = h\left(x'_0 + \frac{\mu_1}{2}\right), \qquad \varepsilon_2 = h\left(y'_0 + \frac{\nu_1}{2}\right),$$

$$\delta_3 = h\left(x'_0 + \frac{\mu_2}{2}\right), \qquad \varepsilon_3 = h\left(y'_0 + \frac{\nu_2}{2}\right),$$

$$\delta_4 = h(x'_0 + \mu_3); \qquad \varepsilon_4 = h(y'_0 + \nu_3);$$

$$\mu_1 = h\Phi(t_0, x_0, y_0, x'_0, y'_0),$$

$$\mu_2 = h\Phi\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{\delta_1}{2}, y_0 + \frac{\varepsilon_1}{2}, x'_0 + \frac{\mu_1}{2}, y'_0 + \frac{\nu_1}{2}\right),$$

$$\mu_3 = h\Phi\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{\delta_2}{2}, y_0 + \frac{\varepsilon_2}{2}, x'_0 + \frac{\mu_2}{2}, y'_0 + \frac{\nu_2}{2}\right),$$

$$\mu_4 = h\Phi(t_0 + h, x_0 + \delta_3, y_0 + \varepsilon_3, x'_0 + \mu_3, y'_0 + \nu_3);$$

$$\nu_1 = h\Psi(t_0, x_0, y_0, x'_0, y'_0),$$

$$\nu_2 = h\Psi\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{\delta_1}{2}, y_0 + \frac{\varepsilon_1}{2}, x'_0 + \frac{\mu_1}{2}, y'_0 + \frac{\nu_1}{2}\right),$$

$$\nu_3 = h\Psi\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{\delta_2}{2}, y_0 + \frac{\varepsilon_2}{2}, x'_0 + \frac{\mu_2}{2}, y'_0 + \frac{\nu_2}{2}\right),$$

$$\nu_4 = h\Psi(t_0 + h, x_0 + \delta_3, y_0 + \varepsilon_3, x'_0 + \mu_3, y'_0 + \nu_3).$$

Искомые приращения функций и их производных:

$$k = \frac{\delta_1 + \delta_4}{6} + \frac{\delta_2 + \delta_3}{3}, \quad l = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_4}{6} + \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}, \quad m = \frac{\mu_1 + \mu_4}{6} + \frac{\mu_2 + \mu_3}{3}$$

и

$$n = \frac{\nu_1 + \nu_4}{6} + \frac{\nu_2 + \nu_3}{3}.$$

Расположение действий примем таким, как указано на схеме 3.

Пример.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{0{,}00029591x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{0{,}00029591y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

Начальные условия (при $t = 0$): $x_0 = 0{,}30750$, $y_0 = 0$, $x'_0 = 0$, $y'_0 = 0{,}034061$. Вычислить значения функций x и y и их производных при $t = 1$ (Lindow Numerische Infinitesimalrechnung). Здесь

$$\Phi = -\frac{0{,}00029591x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \quad \text{и} \quad \Psi = -\frac{0{,}00029591x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

Примем $h = 1$. Схема будет такая:

t	x	y	x'	y'	δ	ε	t
0	0,30750	0	0	0,03406	0	0,03406	0
$^1/_2$	0,30750	0,01703	—0,00156	0,03406	—0,00156	0,03406	$^1/_2$
$^1/_2$	0,30672	0,01703	—0,00156	0,03397	—0,00156	0,03397	$^1/_2$
1	0,30594	0,03397	—0,0313	0,03388	—0,00313	0,03380	1

Продолжение

t	μ	ν	k	l	m	n	t
0	—0,00323	0	—0,00156	0,03397	—0,00312	—0,00017	0
$^1/_2$	—0,00311	—0,00017	—0,00312	0,06803	—0,00624	—0,00034	$^1/_2$
$^1/_2$	—0,00313	—0,00017	—0,00469	0,10200	—0,00936	—0,00051	$^1/_2$
1	—0,00310	—0,00034	—0,00156	0,03406	—0,00312	—0,00017	1

Искомое значение функций при $t=1$: $X=0{,}30594$ и $Y=0{,}03400$. Их производных: $X'=-0{,}00312$ и $Y'=0{,}03389$.

§ 36. Диференциальное уравнение „веревочной" кривой. Пусть дана функция $q=f(x)$.

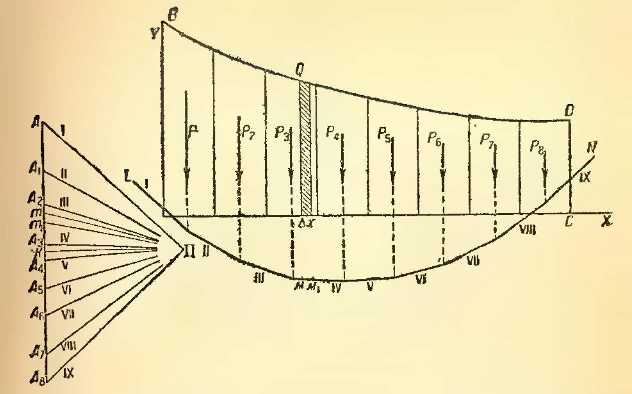
Приняв q за ординату, а x — за абсциссу, построим кривую BD (фиг. 45), соответствующую этой функции. Площадь, ограниченную этой кривой, осью абсцисс и какими-нибудь двумя ординатами OB и CD („грузовую площадь") разобьем ординатами на такие участки, которые было бы можно приближенно принять за прямоугольники или трапеции. Найдя центры тяжести этих участков, приложим к каждому из них в условном масштабе вектор, пропорциональный площади. Можно, например, принять, что каждому квадратному сантиметру площади соответствует вектор длиной в один миллиметр.

Все эти векторы: P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 и P_8, направим параллельно оси OY в сторону убывающих ординат.

Затем из произвольной точки A проведем вектор AA_1, равный и параллельный вектору P_1; из конца A_1 этого вектора проведем вектор A_1A_2, равный и параллельный вектору P_2, и т. д. Получим, таким образом, ряд точек: A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 и A_8, расположенных на одной прямой.

Выбрав затем произвольную точку П (полюс) на расстоянии $H=$ ПК от прямой AA_8, соединим эту точку с точками A, A_1, ..., A_8 лучами: *I*, *II*, *III*, *IV*, *V*, *VI*, *VII*, *VIII* и *IX*.

Из точки L, взятой где-нибудь левее начала O, проведем прямую *I*, параллельную лучу *I*; из точки, в которой эта прямая встречает продолжение вектора P_1, проведем прямую *II*, параллельную лучу *II*; из точки ее пересечения с продолжением вектора P_2 проведем прямую *III*, параллельную лучу *III*, и т. д. Таким образом построим так называемый веревочный многоугольник *L-I-II-...-N*.



Фиг. 45.

Если число участков и тем самым число векторов P_1, P_2, P_3, ... увеличивать до бесконечности, то веревочный многоугольник в пределе обратится в веревочную кривую.

Мы имеем в виду написать диференциальное уравнение этой кривой. Выберем с этой целью на кривой две смежные точки M и M_1 и вообразим, что в них проведены к кривой касательные (эти касательные на фигуре не построены). Тангенсы углов α и α_1, которые образуют с осью OX эти касательные, выразятся так:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{dy}{dx} + \Delta\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

где $\Delta\left(\frac{dy}{dx}\right)$ обозначает приращение производной $\frac{dy}{dx}$ при переходе от точки M к M_1, а x и y — координаты точки M.

Проведя из точки П лучи Пm и Пm_1 параллельно касательным, мы видим, что

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{Km}{H} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = -\frac{Km_1}{H},$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{Km - Km_1}{H},$$

или

$$\Delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{m_1 m}{H}.$$

Но отрезок $m_1 m = Am_1 - Am$ выражает собой ту площадь, которая приходится на элемент длины Δx и показана на фигуре штрихами. Поэтому (численно)

$$m_1 m = q_1 \Delta x,$$

где $q_1 \Delta x$ есть величина заштрихованной площадки.

Таким образом

$$\frac{\Delta\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\Delta x} = \frac{q_1}{H}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, найдем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{H},$$

где $q = \lim q_1$ и есть ордината грузовой линии BD в точке Q, соответствующей точке M.

И так как $q = f(x)$, то искомое уравнение веревочной кривой будет

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f(x)}{H}.$$

Полагая $H = 1$, мы видим, что вторые производные от ординат веревочной кривой равны ординатам „грузовой линии".

§ 37. Интегрирование уравнения $y'' = f(x)$ с помощью вереночной кривой. Из сказанного в предыдущем параграфе следует, что интегральной кривой дифереициального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f(x)}{H}$$

является веревочная кривая.

Если требуется интегрировать уравнение

$$y'' = f(x),$$

то графически можно решить эту задачу, приияв $H = 1$ и построив, как указано выше, веревочную кривую.

В зависимости от выбора полюса П таких кривых можно получить бесчисленное множество, что находится в соответствии с неопределенностью двух произвольных постоянных, входящих в состав общего интеграла. Задача становится определенной и получается определенное решение, если потребовать, например, чтобы кривая прошла через заданную точку и касательная к ней в этой точке была наклонена под определенным углом к оси OX.

Пример. Построить интегральную кривую уравнения

$$y'' = \frac{3 + 2x - x^2}{5 - 2x + x^2},$$

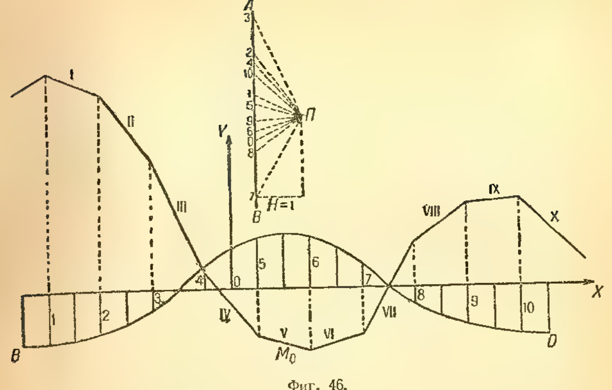
если известно, что она должна пройти через точку $M_0(1, -1)$ и касательная к ней образует с осью OX в этой точке заданный угол α.

Производим действия в таком порядке.

Выбрав определенную единицу длины, строим кривую BD (фиг. 46) по уравнению

$$q = \frac{3 + 2x - x^2}{5 - 2x + x^2}.$$

„Грузовую площадь" разбиваем на 10 участков. Находим центры их тяжести и через них проводим линии, параллельные оси OY. Отрезки этих линий, заключенные между осью OX и построенной кривой, будут представлять собой векторы, пропорциональные площадям участков.



Фиг. 46.

Выбрав затем некоторую прямую AB, параллельную оси OY, мы на ней отложим отрезки

$$\overline{01},\ \overline{12},\ \overline{23},\ \ldots,$$

равные только что построенным векторам. Эти отрезки откладываем вверх, если соответствующий участок кривой лежит ниже оси OX, и вниз, если он лежит выше.

Заметив, что заданная точка M_0 должна лежать на той стороне веревочного многоугольника, которая параллельна пятому лучу, мы из точки 5 прямой AB ведем линию под углом α к оси OX. Она и будет служить лучом V. Полюс П берем на этом луче на расстоянии $H=1$ от AB. Соединяя полюс с точками 0, 1, 2, ..., 10, получим прочие лучи: 0, I, II, ..., X, а потом построим прочие стороны: 0, I, II, ..., X, веревочного многоугольника.

Интегральная кривая получится как предел ломаной, представляющей веревочный многоугольник.

§ 38. Графический способ интегрирования диференциальных уравнений второго порядка при помощи кругов кривизны. Допустим, что дано диференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'),$$

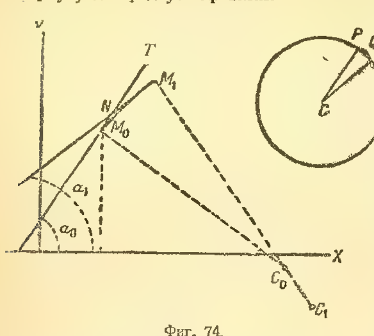
для которого начальные условия таковы:

$$y = b \quad \text{и} \quad y' = c \quad \text{при} \quad x = a.$$

Требуется построять интегральную кривую этого уравнения.

Если не требуется большой точности, то можно применить нижеследующий прием. Взяв систему координат XOY, построить точку $M_0(a, b)$ (фиг. 47). Через эту точку провести прямую, наклоненную к оси OX под углом α_0, тангенс которого равен c, и другую прямую M_0C_0, перпендикулярную к первой. Первая из них будет служить касательной в рассматриваемой точке к искомой интегральной кривой, вторая будет нормалью к ней в той же точке.

Принимая во внимание заданное уравнение, мы можем известную формулу для радиуса кривизны



Фиг. 74.

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

переписать так:

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{f(x, y, y')}. \quad (171)$$

Так как в точке M_0 значения переменных x, y и y' известны, то будет известен и радиус кривизны $\rho = \rho_0$; этот радиус отложим по нормали M_0C_0.

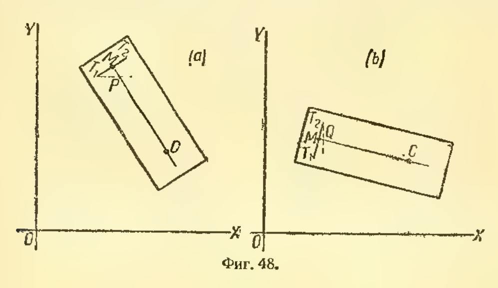
При этом надлежит отличать два случая:

1) если окажется, что $\rho_0 > 0$, то и $y'' > 0$, — кривая обращена вогнутостью в сторону возрастающих ординат; в этом случае длину радиуса кривизны следует откладывать тоже в сторону возрастающих ординат;

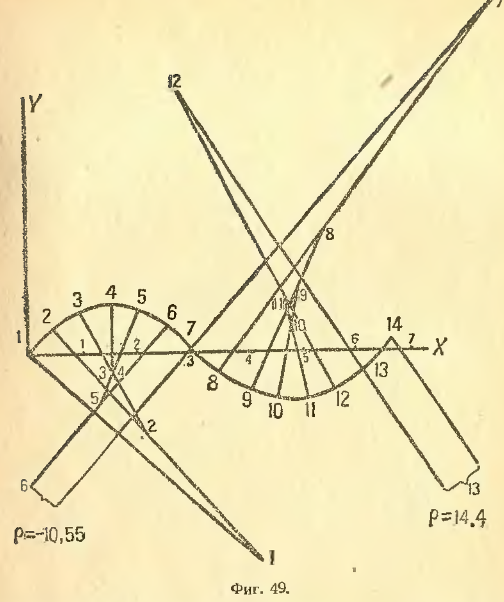
2) если же окажется, что $\rho_0 < 0$, то и $y'' < 0$, — кривая своей вогнутостью обращена в сторону убывающих ординат; в ту же сторону по нормали следует откладывать и длину радиуса.

На фиг. 47 радиус кривизны M_0C_0 построен при втором предположении. Точка C_0 представляет центр кривизны искомой кривой в точке M_0. Радиусом ρ_0 опишем из этого центра небольшую дугу M_0M_1 круга кривизны и вычислим (измерим) координаты x_1 и y_1 точки M_1, а также и тангенс угла α_1, под которым наклонена к оси OX касательная к кривой в точке M_1. Таким образом в точке M_1 нам будут известны: x_1, y_1 и $y_1' = \operatorname{tg} \alpha_1$.

Принимая точку M_1 за точку искомой кривой, мы по той же формуле (171) вычислим радиус кривизны ρ_1 в этой точке. Построив этот радиус вдоль нормали к кривой в точке M_1, найдем центр кривизны C_1



Фиг. 48.



Фиг. 49.

и из него радиусом ρ_1 опишем небольшую дугу M_1M_2. Поступая по этому способу так же дальше, мы получим кривую, состоящую из небольших дуг окружностей. Эту кривую и примем за приближенное очертание искомой интегральной кривой.

Вычерчивание последовательных дуг может быть с удобством произведено при помощи особого рода линейки. Сделанная из целлулоида (фиг. 48, *a* и *b*) линейка эта снабжена отверстием *M* — для острия карандаша — и „средней линией" *MC*, вдоль которой тоже проделаны отверстия. Средняя линия проградуирована и служит для откладывания радиусов кривизны. Кроме линейки в состав прибора входит еще небольшой треножник с заостренными ножками.

Если нужно вычертить дугу круга кривизны в данной точке, то, вычертив прежде всего, как сказано выше, касательную и нормаль в этой точке, мы совмещаем отверстие *M* с этой точкой и располагаем среднюю линию вдоль нормали. Вычислив длину радиуса кривизны, отмерим эту длину по имеющимся на средней линии делениям и найдем, таким образом, центр кривизны *C*. Затем поставим треножник так, чтобы одна из его ножек прошла через отверстие *C*, а две другие

стояли на чертежной бумаге. Дальше уже нетрудно будет, поместив острие карандаша в M, вычертить малую дугу радиусом CM из неподвижного центра C.

Построенный таким образом прибор позволяет произвести вычерчивание с бо́льшим удобством и бо́льшей точностью, чем это можно было бы сделать обыкновенным циркулем.

При помощи той же линейки можно легко измерить и тангенсы углов, образуемых касательными с осью OX. Для этого по обе стороны от отверстия M на прямой, перпендикулярной к средней линии, и на расстояниях от M, равных единице, наносят две отметки T_1 и T_2. Если линейка занимает положение, указанное на фиг. 48, a, то, проведя через точку T_1 прямую $T_1P \| OX$, мы получим угол PT_1M, равный углу α, образуемому касательной в точке M с осью OX. Ввиду того что $MT_1 = 1$, имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = PM.$$

В случаях, когда угол α получается большим (фиг. 48, b), измеряют не его тангенс, а тангенс угла QT_2M, образованного прямой T_1T_2 с прямой T_2Q, параллельной оси OY. Нетрудно видеть, что тангенс этого угла равен QM и что

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = \frac{1}{QM}.$$

Пример. В виде примера приводим графическое интегрирование уравнения

$$y'' + 0{,}5\,y' + \sin y = 0,$$

заимствованное из книги Hort „Die Differentialgleichungen des Ingenieurs".

Начальные условия таковы: при $x = 0$ функция $y = 0$ и производная $y' = 1$. В таблице приведены соответствующие чертежу численные значения (фиг. 49).

n	x_n	y_n	$\sin y_n$	y'_n	y''_n	ρ_n
0	0	0	0	1	—0,50	—5,66
1	0,5	0,43	0,41	0,79	—0,80	—2,57
2	1,0	0,78	0,69	0,48	—0,93	—1,45
3	1,5	0,89	0,78	0,10	—0,83	—1,23
4	2,0	0,83	0,74	—0,33	—0,57	—1,96
5	2,5	0,56	0,53	—0,71	—0,17	—10,55
6	3,0	0,15	0,15	—0,80	0,25	8,40
7	3,5	—0,22	—0,22	—0,69	0,56	3,18
8	4,0	—0,51	—0,48	—0,44	0,70	2,02
9	4,5	—0,67	—0,62	—0,17	0,70	1,45
10	5,0	—0,67	—0,62	+0,17	0,54	1,88
11	5,5	—0,49	—0,47	0,48	0,22	6,05
12	6,0	—0,19	—0,19	0,60	—0,11	—14,4
13	6,5	0,10	0,10	—	—	—

Применяя описанный прием, мы можем получить иногда радиус кривизны столь длинным, что его построение и тем самым построение соответствующего центра кривизны в границах чертежа становится невозможным. В этом случае прием приближенного построения интегральной кривой должен быть несколько видоизменен.

Описав из произвольного центра C окружность радиусом, равным единице (фиг. 47), проводим радиус CP параллельно касательной к кривой M_0T, положение которой в силу начальных условий вполне определено. Вычислив по формуле (171) радиус кривизны ρ_0, мы вместе с тем будем знать и кривизну $K_0 = \frac{1}{\rho_0}$ в точке M_0. И если радиус ρ_0 велик, то кривизна K_0 мала.

Отложив на касательной M_0T отрезок $M_0N = \Delta s$, мы в то же время построим касательную [1]) в точке P к окружности C и на ней отложим отрезок $PQ = K_0 \Delta s$. Этот отрезок отложим в указанном на фигуре направлении — в случае, когда $\rho_0 < 0$, и в противоположном — при $\rho_0 > 0$. Затем из точки Q, как из центра, опишем дугу радиусом $K_0 \Delta s$ и отметим точку R ее пересечения с окружностью центра C. Соединив точки R и C и проведя из точки N прямую NM_1 параллельно RC, отложим на этой прямой отрезок $NM_1 = \Delta s$. Тогда точка M_1 будет служить концом дуги круга кривизны; отыскание ее не требовало нахождения центра кривизны C_0.

Доказать, что дуга M_0M_1 принадлежит кругу кривизны, можно, проведя $M_0C_0 \perp M_0N$ и $M_1C_0 \perp NM_1$ соответственно в точках M_0 и M_1. Рассматривая подобие фигур, нетрудно будет показать, что $M_0C_0 = \rho_0$. Мы здесь предположили, что радиус кривизны велик в начальной точке M_0. Совершенно понятно, что сказанное можно применить к любой точке интегральной кривой.

---

[1]) На чертеже линия PQ не является касательной к окружности, так как иначе чертеж делается неясным.

БИБЛИОГРАФИЯ.

A. Таблицы специальных фуякций.

1. Янке Э. и Эмде Ф., Таблицы специальвых функций, ГОНТИ 1939, — четырехзначные таблицы для бесселевых, сфернческих, эллиптических и некоторых других функций; содержат большое колнчество справочного материала (формулы н графикн). Особенно подробно представлены фувкции Бесселя от комплексвого аргумента.

2. Глазеиап С. П., Математические н астрономические таблицы, Акад. наук 1932, — кроме специальиых функций дан целый ряд другнх, полезных при вычислениях, таблиц: натуральных логарифмов, логарифмов от логарифмов и др.

3. Мілн-Томсон Л. М., Эллиптические функции Якоби, ДНТВУ 1933, — пятизначные таблицы функцнй с разиостями: $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ н полных эллиптических интегралов.

4. Самойлова-Яхонтова Н., Таблицы эллиптнческих интегралов ОНТИ 1935, — пятизвачные.

5. Hayashi Keiichi, Sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen und deren Produkte sowie der Gammafunktionen, Berlin J. Springer 1926, — большие таблицы: круговых н гиперболических и им обратных функций, $e^{\pm x}$ и гамма-функций.

6. Hayashi Keiichi, Tafeln der Besselschen, Theta-Kugel- und anderer Funktionen, Berlin J. Springer 1930, — многозначные таблицы для бесселевых, сферических и тэта-функций.

7. Potin L., Formules et tables numériques, Paris Gauthier-Villars 1925, — содержат таблицы круговых и гиперболических (10 знаков) функций; снабжены большим справочным материалом (формулами) и изобилуют более мелкимн вспомогательиыми таблицами, как-то: e^x, $\frac{\sin x}{x}$, $(\cos x)^{1/2}$, $\cos^2 x$, $\lg \Gamma(n+1)$ и др.

B. Руководства по интегрировавию обыкиовеиных диференциальных уравненнй и специальным фуикциям.

1. Смнрнов В. И., Курс высшей математики, ОНТИ 1936, т. II, стр. 77—206, т. III, стр. 499—733.

2. Гурса Э., Курс математического анализа, ОНТИ 1936, т. II, стр. 261—470, 482—491.

3. Пиаджно Г., Интегрирование диференциальвых уравиенний, ГТТИ 1933.

4. Горт В., Диференциальные уравнения, ГТТИ 1933.

5. Гогейзель, Обыкновенные диференцнальные уравнения, ОНТИ 1936.

6. Крылов А. Н., О некоторых диферeициальных уравненнях, имеющих приложение в технических вопросах, Акад. наук 1933.